

Méthode LBM-MRT et le modèle RANS pour la simulation d'un écoulement bidimensionnel dans une cavité semi-circulaire

MRT-LBM and RANS approach for simulation of flow in two-dimensional semi-circular cavity

Ali HADDACH^{1*}, Hassan SMAOUI², Bouchaib RADI¹

^{1*} Hassan First University of Settat, FST, LIMII, BP : 577, Route de Casa, Settat,

² Cerema/DTecREM, Margny-lès-Compiègne, Associate Researcher at Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France

* Corresponding author : a.haddach@uhp.ac.ma

RÉSUMÉ. L'objectif principal de cet article est d'étudier la performance d'une méthodologie basée sur la méthode de Lattice Boltzmann à temps de relaxation multiple (LBM-MRT) pour résoudre le modèle de turbulence à deux équations $k-\epsilon$, et traiter avec précision un écoulement incompressible à un grand nombre de Reynolds (Re) dans des régions avec des coins et des frontières courbées. Pour réaliser cet objectif, nous avons opté pour un écoulement entraîné par la paroi dans une cavité semi-circulaire. Sur la base des résultats numériques obtenues et présentées dans cet article, le modèle montre sa capacité à capturer la formation des tourbillons primaires, secondaires et tertiaires au fur et à mesure que le nombre de Reynolds Re augmente, et ceci présente une grande concordance avec la littérature.

ABSTRACT. The main objective of this paper is to study the performance of a methodology based on the multiple relaxation time Lattice Boltzmann Method (MRT-LBM) to solve the two-equation turbulence model $k-\epsilon$, and accurately treat incompressible flow at high Reynolds numbers (Re) in regions with curved corners and boundaries. To achieve this objective, we opted for wall-driven flow in a semicircular cavity. On the basis of the numerical results obtained and presented in this article, the model shows its ability to capture the formation of primary, secondary and tertiary vortices as the Reynolds number Re increases, and this presents a good agreement with the literature.

MOTS-CLÉS. Lattice Boltzmann Method, turbulence, modèle $k-\epsilon$, cavité semi-circulaire, temps de relaxation multiple.

KEYWORDS. Lattice Boltzmann Method, turbulence, $k-\epsilon$ model, semi-circular cavity, multiple relaxation time.

1. Introduction

La modélisation numérique des écoulements turbulents joue un rôle essentiel dans de nombreuses applications industrielles et environnementales pour prédire le comportement des écoulements. Dans de nombreuses branches de la physique et de l'ingénierie, de l'écoulement des fluides dans les rivières au mouvement de l'air autour des avions, la turbulence est un phénomène omniprésent et complexe. Ainsi, pour comprendre et modéliser ces mouvements chaotiques et irréguliers, les chercheurs au fil des temps ont inventés et utilisés différentes approches. Parmi ces approches, on cite : les modèles RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), le modèle LES (Large-Eddy Simulations) et le modèle DNS (Direct Numerical Simulation). En effet, le DNS et le LES permettent d'obtenir la plus grande précision, tout en résolvant directement les échelles les plus grandes de la turbulence, tandis que les échelles plus petites sont filtrées ou modélisées. Cependant, l'obtention d'informations détaillées sur les écoulements turbulents à grande échelle par le DNS ou LES nécessite des ressources de calcul informatiques importantes et prohibitives. Par conséquent, pour les applications pratiques, la modélisation de la turbulence par la moyenne de Reynolds pour les équations de Navier-Stokes (RANS) est plus pratique que la DNS [SHU 17], et peut également être la seule approche possible pour la simulation à grande échelle des écoulements turbulents complexes dans les applications industrielles. En fait, le modèle RANS est basé sur les équations de

Navier-Stokes pour prédire les caractéristiques moyennes d'un écoulement turbulent. Plutôt que de résoudre directement toutes les échelles de turbulence, ce qui serait extrêmement coûteux en termes de calcul, le modèle RANS sépare les variables d'écoulement en composantes moyennes et fluctuantes. Ces équations moyennées sont combinées pour obtenir un système d'équations résolues numériquement afin de prédire l'écoulement moyen, et les fluctuations sont modélisées à l'aide d'équations empiriques [SMA 96]. Parmi les différents modèles de turbulence, on trouvera le modèle Spalart Allmaras (SA) à une équation et les modèles à deux équations $\kappa-\varepsilon$ et $\kappa-\omega$ sont des exemples courants de modèles de turbulence utilisant l'approche RANS.

Malgré de nombreuses études sur la simulation des écoulements turbulents, la plupart des méthodes numériques de simulation des écoulements turbulents sont basées sur la discrétisation des équations macroscopiques par la méthode des volumes finies, différences finies et éléments finies ou méthode de multigrille [GHI 82, GLO 06, WEN 11, SCHU 75, MOF 09]. Cependant, au cours des deux dernières décennies, la méthode de Boltzmann sur réseau (en anglais, Lattice Boltzmann Method (LBM)) est une nouvelle approche numérique qui émerge rapidement et qui montre son efficacité et sa capacité à simuler de nombreux phénomènes complexes, tels que le transfert de chaleur [MOF 09, SHI 04], écoulements côtiers [HAD 22], flux magnétohydrodynamique [CHE 22], ainsi que le RANS, DNS et LES pour les écoulements turbulents [SUC 95, SAJ 16, YAN 12, SAT 23, GLO 06]. En tant que méthode en développement, la LBM présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes numériques traditionnelles de la dynamique des fluides numérique (CFD), en particulier dans la précision, la stabilité numérique et la rapidité des coûts de calcul. En effet, en terme de stabilité, les chercheurs ont démontré que la LBM avec l'opérateur BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) présente des instabilités numériques pour simuler un écoulement à nombre de Reynolds élevé, lorsque le temps de relaxation approche la moitié. Une solution consiste à adopter le modèle MRT (multiple relaxation time) [LAL 00] qui s'est avéré produire des solutions stables pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé. En outre, la LBM peut être facilement mis en œuvre dans des machines parallèles massives telles que les unités de traitement graphique (GPU).

Récemment, pour les écoulements turbulents, la LBM a été largement utilisé comme outil de simulation numérique combinée avec soit le modèle DNS [Yan 12], soit avec le modèle LES [SAT 23, CHE 09]. Cependant, l'application de LBM avec le modèle RANS, qui pourrait fournir une approche attrayante dans la simulation des écoulements turbulents, a néanmoins été rare observée avec peu de chercheurs choisissant LBM pour résoudre les équations de RANS [SAJ 16, SUC 95]. Ainsi, le modèle standard à deux équations $\kappa-\varepsilon$ reste le choix le plus populaire pour la simulation des écoulements turbulents dans les applications industrielles. En effet, pour l'utilisation du modèle $\kappa-\varepsilon$ dans le cadre de la LBM, deux approches différentes ont été utilisées. Dans une étude en précédente, Succi et al. [SUC 95] ont proposé de créer deux populations supplémentaires dans la LBM pour obtenir la solution des équations $\kappa-\varepsilon$. Teixeira [TEI 98] et Succi et al. [SUC 99] ont toutefois suggéré d'utiliser la méthode LBM en conjonction avec le schéma des différences finies pour résoudre les équations $\kappa-\varepsilon$. Récemment, Sajjadi et al. [SAJ 16] ont utilisé la LBM en conjonction avec les modèles standard et RNG de $\kappa-\varepsilon$ pour simuler l'écoulement turbulent de l'air et le dépôt et la dispersion des particules. Ils ont montré que LBM avec le modèle $\kappa-\varepsilon$ fournissait une description raisonnablement précise des écoulements turbulents à un coût de calcul modeste. Ainsi, en raison de l'absence des travaux qui résout les équations $\kappa-\varepsilon$ avec la méthode LBM, nous sommes motivés pour simuler numériquement l'écoulement turbulent d'un fluide dans une cavité circulaire par la méthode LBM. En effet, l'écoulement dans une cavité circulaire a été moins étudié par les chercheurs que celui dans une cavité carrée, même si les deux problèmes présentent les mêmes similitudes géométriques. Par exemple, Glowinski et al. [GLO 06] ont employé une méthode de séparation des opérateurs et d'éléments finis pour traiter l'écoulement d'un fluide dans une cavité semi-circulaire et ont capturé la formation de tourbillons primaires, secondaires et tertiaires et ont identifié un phénomène de bifurcation de Hopf autour de $Re=6600$. Ding et al et Yang et al ont simulé l'écoulement d'une cavité circulaire par LBGK et ont présenté des solutions pour $Re=6600$.

L'objectif principal de la présente étude est d'utiliser la méthode LBM pour résoudre modèle de turbulence à deux équations $\kappa-\varepsilon$. La méthodologie est développée et le modèle de calcul est ensuite testé pour l'écoulement bidimensionnel dans une cavité semi-circulaire à des nombres de Reynolds compris entre 500 et 6600 en appliquant l'opérateur MRT LBM.

2. Modèles mathématiques

2.1. Méthode de Lattice Boltzmann (LBM)

L'équation gouvernante du modèle temps de relaxation multiple de la méthode Lattice Boltzmann (MRT-LBM) [d'HUM 01] est la suivante :

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) - M^{-1} S (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{eq}) + \mathbf{F} \quad (1)$$

où f est la fonction de distribution des vitesses, e_i est le vecteur des vitesses, M est la matrice de transformation et S est la matrice diagonale des collisions avec des paramètres ajustables. Le vecteur \mathbf{m} qui est le vecteur de la fonction de distribution des vitesses dans l'espace des moments, est calculé par $\mathbf{m} = Mf$. \mathbf{m}^{eq} est le moment d'équilibre et \mathbf{F} est le terme de force dans l'espace des moments. [GUO 13]. Le modèle D2Q9 est choisi pour la simulation numérique (voir Fig.1). Les détails de \mathbf{m}^{eq} , M et \mathbf{F} pour la simulation sont présentés dans [GUO 13]. Les paramètres de S sont fixés comme suit $S = \text{diag}[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8]$, où s_7, s_8 sont définies par $s_7 = s_8 = \frac{1}{\tau_0}$. τ_0 est le temps de relaxation qui est lié à la viscosité cinématique du fluide $\tau_0 = 3\nu_0 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{1}{2}$.

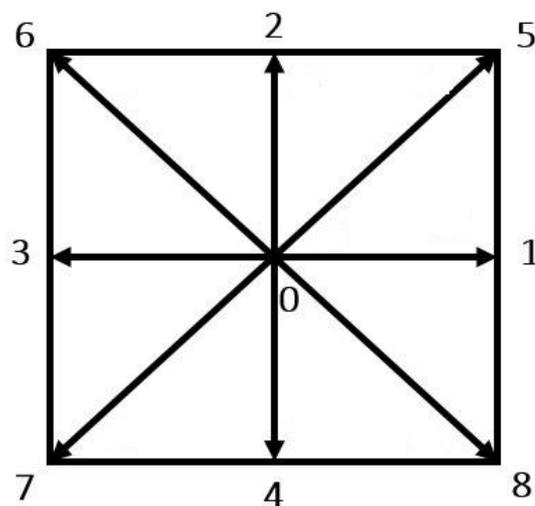


Figure 1. Réseau D2Q9

2.2. Modélisation de la turbulence

2.1.1. Modèle $k-\epsilon$ standard

Les équations de transport pour k et ϵ sont généralement formulées comme suit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(u_i k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_0}{\sigma_{k0}} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + S_k \quad (2)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \epsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_0}{\sigma_{\epsilon 0}} + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + S_\epsilon \quad (3)$$

Les paramètres $\sigma_{k0}, \sigma_k, \sigma_{\epsilon 0}$ et σ_ϵ dans les équations (2) et (3) sont des constantes du modèle, qui s'expriment en général comme suit : $\sigma_{k0} = \sigma_k = \sigma_{\epsilon 0} = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3$. La viscosité turbulente du modèle s'exprime comme suit :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

Avec C_μ constante du modèle qui égale à $C_\mu = 0.09$.

Les termes sources S_k et S_ϵ pour le modèle $k-\epsilon$ standard sont donnés comme suit :

$$S_k = P_k - \epsilon \quad (5)$$

$$S_\epsilon = c_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (6)$$

Le terme P_k représente la production d'énergie cinétique de la turbulence (terme de production), et est définie comme suit $P_k = \nu_t |\bar{S}^2|$. \bar{S} est le tenseur de taux de déformation et $\bar{S} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(7)

Le tenseur de déformation peut être rapproché par plusieurs méthodes numériques, c'est ce qu'on va montrer par la suite. Les paramètres c_1 et c_2 sont des constantes du modèles, et elles sont définies comme suit : $c_1 = 1.44$ et $c_2 = 1.92$.

2.2.1. Discrétisation numérique du modèle $k-\epsilon$ standard

Dans cette section, pour obtenir la valeur de la viscosité turbulente ν_t , le modèle $k-\epsilon$ standard a été résolu par la LBM. En effet, la première étape à déterminer ν_t est de définir les fonctions de distributions, g_i et h_i , respectivement pour k et ϵ comme suit :

$$k = \sum_i g_i \quad (8)$$

$$\epsilon = \sum_i h_i \quad (9)$$

Ainsi, la forme finale des équations (3) et (4) par la LBM sera comme suit :

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_k} [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t \mathbf{F}_i \quad (10)$$

$$h_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - h_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_\epsilon} [h_i(\mathbf{x}, t) - h_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t \mathbf{F}_i \quad (11)$$

Où $\tau_k, \tau_\epsilon, h_i^{eq}$ et g_i^{eq} sont données par :

$$\tau_k = \frac{(v_0 + \alpha_k v_t)}{c_s^2} + 0.5 = \frac{v_0}{c_s^2} + 0.5 + \frac{\alpha_k v_t}{c_s^2} = \tau_0 + \frac{\alpha_k v_t}{c_s^2} \quad (12)$$

$$\tau_\epsilon = \frac{(v_0 + \alpha_\epsilon v_t)}{c_s^2} + 0.5 = \frac{v_0}{c_s^2} + 0.5 + \frac{\alpha_\epsilon v_t}{c_s^2} = \tau_0 + \frac{\alpha_\epsilon v_t}{c_s^2} \quad (13)$$

$$g_i^{eq}(x, t) = \omega_i k \left[1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(e_i \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u \cdot u}{c_s^2} \right] \quad (14)$$

$$h_i^{eq}(x, t) = \omega_i \epsilon \left[1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(e_i \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u \cdot u}{c_s^2} \right] \quad (15)$$

Le terme force F_i pour k et ϵ est donné par :

$$\text{Pour } k \quad F_i = \omega_i (v_t |S^2| - \epsilon) \quad (16)$$

$$\text{Pour } \epsilon \quad F_i = \omega_i \left(c_1 \frac{\epsilon}{k} v_t |S^2| - c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \right) \quad (17)$$

où $\omega_0 = 4/9, \omega_{1-4} = 1/9, \omega_{5-8} = 1/36$.

Puisque la méthode LBM est caractérisée par la simplicité et l'efficacité, le tenseur de déformation définie par l'Eq (7) implique le calcul des dérivées et donc n'est pas une forme appropriée à modéliser. Pour conserver la cohérence avec la LBM, il est naturel de calculer S_{ij} en termes de fonctions de distributions. En utilisant le développement de Chapman-Enskog, on peut trouver une relation simple et efficace pour calculer S_{ij} [ZHO 04] définie comme suit :

$$S_{ij} = -\frac{3}{2e^2 \tau_i \Delta t} \sum_i e_{i\alpha} e_{i\beta} (f_i - f_i^{eq}) \quad (18)$$

3. Domaine d'étude et conditions aux limites

Le domaine d'étude est illustré dans la figure 2. En effet, le domaine occupé par le fluide est la région bidimensionnelle de la cavité semi-circulaire. Le domaine est couvert par 252×126 mailles de pas $\Delta x = \Delta y = 0.004$. Le pas du temps et le temps de relaxation ont été fixés, respectivement, à $\Delta t = 0.0075$ et $\tau_0 = 0.5$. Sur la limite supérieure de la cavité (Γ_t), on impose une vitesse uniforme $U = 0.1 \text{ m/s}$. L'arc du demi-cercle AB (Γ_w) est considéré comme une paroi immobile ($u=v=0$). Pour déterminer les conditions aux limites de l'énergie cinétique turbulente et la dissipation, il est souvent nécessaire d'estimer l'intensité de la turbulence sur les entrées. Pour ce faire avec précision, nous avons employé l'intensité turbulente I donnée par $I = 0.16 \times Re^{-\frac{1}{8}}$, où Re est le nombre de Reynolds, pour déterminer l'énergie cinétique turbulente donnée par $k = \frac{3}{2}(U \times I)^2$. Ensuite, le terme de

dissipation est déduit de l'énergie cinétique turbulente par la formule suivante : $\epsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_m}$, où l_m est la longueur de turbulence et est estimée comme suit $l_m = 0.07L$, avec L est le diamètre de la cavité (longueur caractéristique).

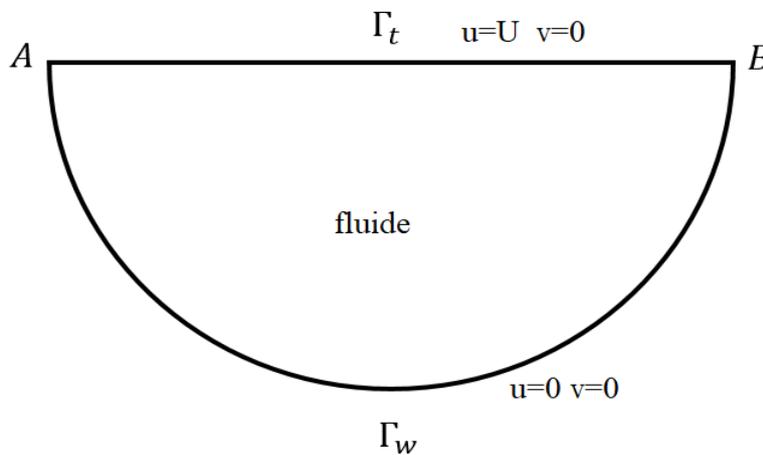


Figure 2. *Ecoulement dans une cavité semi-circulaire*

4. Simulation numérique et discussion

Dans ce présent travail, nous avons étudié la stabilité de l'écoulement dans une cavité semi-circulaire en effectuant des simulations pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re défini comme $Re = UL/\nu$, où U est la vitesse caractéristique du fluide, L est la longueur caractéristique du domaine et ν est la viscosité cinématique du fluide. La simulation de la cavité par le modèle $k-\epsilon$ a atteint l'état stable pour un nombre de Reynolds allant jusqu'à 6600, les lignes de courants de l'écoulement stable pour $Re = 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 6600$ sont présentés dans les figures 3-8.

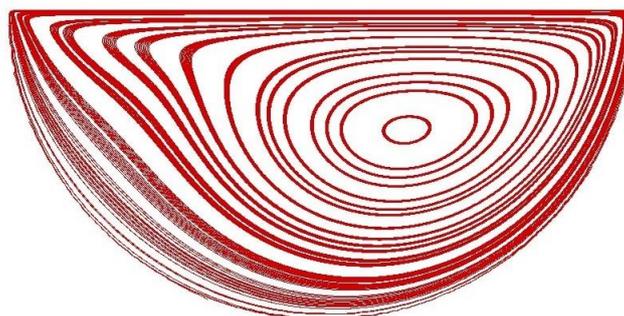


Figure 3. *Les lignes de courants pour $Re = 500$*

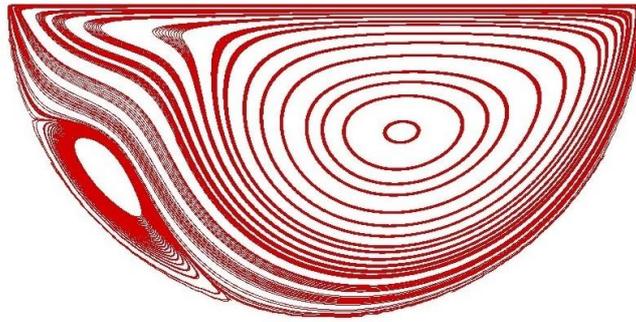


Figure 4. *Les lignes de courants pour $Re = 1000$*

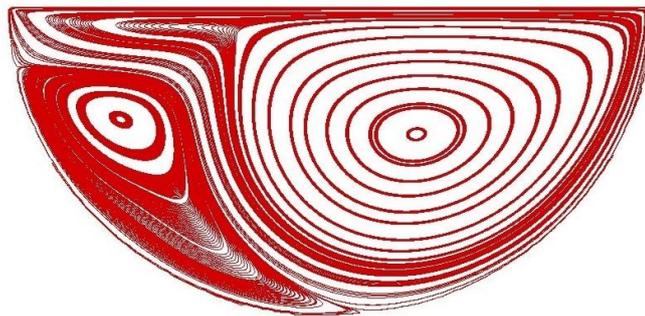


Figure 5. *Les lignes de courants pour $Re = 2000$*

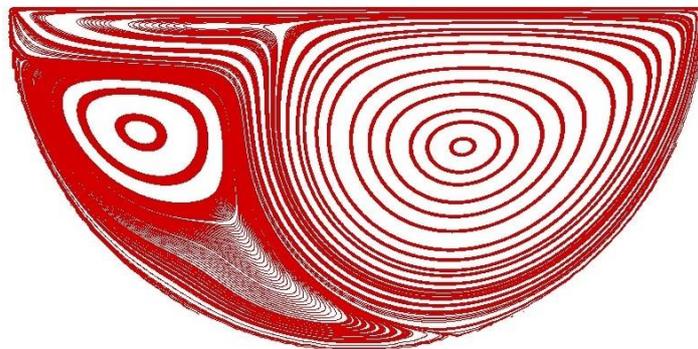


Figure 6. *Les lignes de courants pour $Re = 3000$*

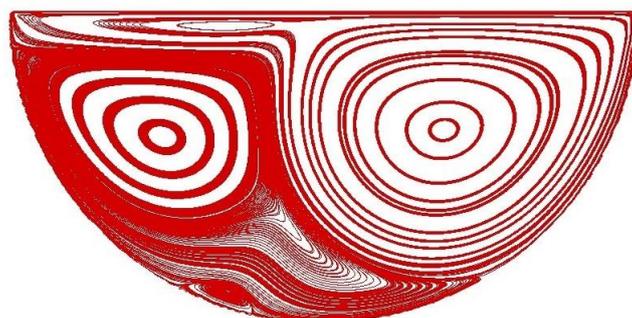


Figure 7. *Les lignes de courants pour $Re = 5000$*

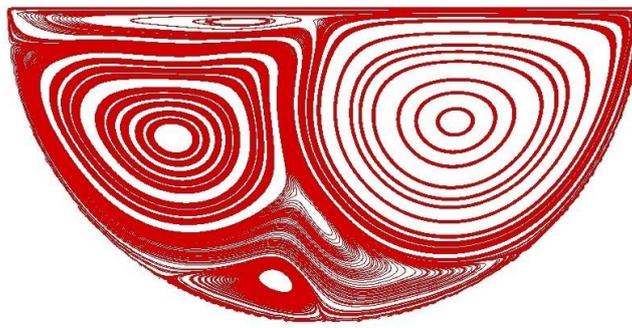


Figure 8. Les lignes de courants pour $Re = 6600$

En effet, lorsque le nombre de Reynolds est faible, l'état d'équilibre final est constitué d'un seul tourbillon et il n'y a pas de séparation. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, la séparation des tourbillons commence à se produire, la taille et la structure de la région séparée changent et un tourbillon secondaire, puis un tourbillon tertiaire apparaissent. Par ailleurs, les tourbillons secondaires et tertiaires se développent au fond et, à mesure que le nombre de Reynolds augmente, ils se développent en poussant le tourbillon principal vers la partie droite de la cavité comme le montrent les figures 3 à 8. Le présent résultat de la simulation numérique est en accord avec la référence [YAN 12, GLO 06].

Le mouvement du fluide généré dans cette cavité est un exemple de problèmes de lignes de courant fermées qui sont d'une importance théorique parce qu'ils font partie d'un champ d'écoulements réguliers et séparés. Contrairement à la cavité carrée, un tourbillon majeur occupe la partie centrale du domaine tandis que des tourbillons mineurs apparaissent dans les coins inférieurs et en haut à gauche [GHI 82]. Dans le cas d'une cavité semi-circulaire, les tourbillons se développent au fond et, à mesure que le nombre de Reynolds augmente, ils s'accroissent en poussant le tourbillon principal vers la partie droite de la cavité.

Dans le tableau 1, nous avons donné le résultat du centre de chaque tourbillon formé à différent nombre de Reynolds en le comparant avec les références [GLO 06, YAN 12, DIN 09].

Re		500	1000	2000	3000	5000	6600
Centre du vortex primaire		(0.639,0.3093)	(0.6231, 0.2986)	(0.6319, 0.2957)	(0.6452, 0.2988)	(0.6836, 0.3090)	(0.7041, 0.3180)
	[YAN12]	—	(0.6201, 0.2940)	(0.6376, 0.2939)	(0.6553, 0.2959)	(0.6846, 0.3037)	(0.7002, 0.3095)
	[GLO06]	—	(0.6214, 0.2970)	(0.6359, 0.2948)	(0.6514, 0.2973)	(0.6833, 0.3064)	(0.7009, 0.3109)
	[DIN09]	(0.642,0.3099)	(0.6221, 0.2983)	(0.6309, 0.2955)	(0.6468, 0.2971)	(0.6715, 0.3027)	(0.6804, 0.3112)
Centre du vortex secondaire		—	(0.1560, 0.2230)	(0.1714, 0.3180)	(0.1906, 0.3129)	(0.2316, 0.2988)	(0.2661, 0.2911)
	[YAN12]	—	(0.1534, 0.2412)	(0.1748, 0.3174)	(0.1904, 0.3154)	(0.2353, 0.3018)	(0.2510, 0.3000)
	[DIN09]	—	(0.1566, 0.2230)	(0.1750, 0.3156)	(0.1795, 0.3281)	(0.2124, 0.3196)	(0.2327, 0.3156)
Centre du vortex tertiaire		—	—	—	—	(0.3494, 0.049)	(0.4032, 0.0632)
	[YAN12]	—	—	—	—	(0.3291, 0.0557)	(0.3916, 0.0673)
	[DIN09]	—	—	—	—	(0.2752, 0.0752)	(0.3405, 0.0841)

Tableau 1. Localisation du centre des tourbillons

5. Conclusion

Le présent papier a fourni une approche de calcul LBM-MRT pour résoudre le modèle de turbulence à deux équations $k-\epsilon$. Les équations de transport pour l'énergie cinétique de la turbulence et le taux de dissipation ont été incorporées dans la LBM et le nouveau modèle a été

utilisé pour simuler et analyser l'écoulement entraîné par la paroi à l'intérieur d'une cavité semi-circulaire. L'écoulement est évalué pour différents nombres de Reynolds. Le nombre de Reynolds est compris entre 500 et 6600. Les résultats numériques montrent que lorsque le nombre de Reynolds est petit, l'état d'équilibre final est constitué d'un seul tourbillon. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, un tourbillon secondaire puis un tourbillon tertiaire apparaissent. Dans le cas d'une cavité semi-circulaire, les tourbillons se développent au fond et, à mesure que le nombre de Reynolds augmente, ils grandissent en poussant le tourbillon principal vers la partie droite de la cavité. Les résultats sont en accord avec la littérature, ce qui démontre la stabilité numérique supérieure et l'efficacité du modèle LBM-RANS à des écoulements à différents nombres de Reynolds.

Bibliographie

- [SHU 17] SHULI S., NING Y., « Numerical study and acceleration of LBM-RANS simulation of turbulent flow », *Chinese Journal of Chemical Engineering*, n° 26, p. 31-42, July 2017.
- [SMA 96] SMAOUI H., Modélisation numérique tridimensionnelle de l'hydrodynamique et des transports sédimentaires en Manche orientale et dans le sud de la Mer du Nord, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.
- [GHI 82] GHIA, U., GHIA, K. N., SHIN, C.T. « High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method », *Journal of Computational Physics*, n° 48, p.387-411, January 1982.
- [GLO 06] GLOWINSKI, R., GUIDOBONI, G., PAN, T.W., « Wall-driven incompressible viscous flow in a two-dimensional semi-circular cavity », *Journal of Computational Physics*, n° 216, p.76-91, January 2006.
- [WEN 11] WENQUAN, W., LIXIANG, Z., YAN, Y., YAKUN, G., « Finite Element Analysis of Turbulent Flows Using LES and Dynamic Subgrid-Scale Models in Complex Geometries », *Mathematical Problems in Engineering*, May 2011.
- [SCHU 75] SCHUMANN, U., « Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli », *Journal of Computational Physics*, n° 18, p.376-404, January 1975.
- [MOF 09] MOFDI, E.A., SEADID, M., « Large eddy simulation of turbulent heat transport in the Strait of Gibraltar », *Mathematics and Computers in Simulation*, n° 79, p. 3444–3454, April 2009.
- [SHI 04] SHI, Y., ZHAO, T.S., GUO, Z.L., « Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model for flows with viscous heat dissipation in the incompressible limit », *PHYSICAL REVIEW E*, n° 70, p. 066310, December 2004.
- [HAD 22] HADDACH, A., SMAOUI, H., RADI, B., « La méthode de Boltzmann sur réseaux pour les écoulements côtiers : Application à la lagune de Oualidia », *Ingénierie et systèmes*, Vol 6 n° 1, September 2022.
- [CHE 22] CHERKAOUI, I., BETTAIBI, S., BARKAOUI, A., KUZNIK, F., « Magnetohydrodynamic blood flow study in stenotic coronary artery using lattice Boltzmann method », *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, n° 221, April 2022.
- [SUC 95] SUCCI, S., AMATI, G., BENZI, R., « Challenges in Lattice Boltzmann Computing », *Journal of Statistical Physics*, Vol 81, n° 1/2, 1995.
- [SAJ 16] SAJJADI, H., SALMANZADEH, M., AHMADI, G., JAFARI, S., « Lattice Boltzmann method and RANS approach for simulation of turbulent flows and particle transport and deposition », *Particuology*, (2016).
- [YAN 12] YANG, F., SHI, X., GUO, X, SAI, Q., « MRT Lattice Boltzmann Schemes for High Reynolds Number Flow in Two-Dimensional Lid-Driven Semi-Circular Cavity », 2012 International Conference on Future Energy, Environment, and Materials, *Energy Procedia*, Elsevier Editions, 2012.
- [SAT 23] SATO, K., KAWASAKI, K., KOSHIMURA, S., « A numerical study of the MRT-LBM for the shallow water equation in high Reynolds number flows: An application to real-world tsunami simulation », *Nuclear Engineering and Design*, n° 404, January 2023.
- [LAL 00] LALLEMAND, P., LUO, L-S., « Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability », *PHYSICAL REVIEW E*, Vol 61, n° 6, June 2000.
- [CHE 09] CHEN, S., « A large-eddy-based lattice Boltzmann model for turbulent flow simulation », *Applied Mathematics and Computation*, n° 215, P. 591-598, 2009.

- [TEI 98] TEIXEIRA, C.M., «INCORPORATING TURBULENCE MODELS INTO THE LATTICE-BOLTZMANN METHOD», *International Journal of Modern Physics C*, Vol 9, n° 8, P. 1159-1175, 1998.
- [SUC 99] SUCCI, S., CHEN, H., TEIXEIRA, C., BELLA, G., DE MAIO, A., & MOLVIG, K, « An integer lattice realization of a Lax scheme for transport processes in multiple component fluid flows». *Journal of Computational Physics*, Vol 152, n°2, p. 493–516. 1999.
- [d'HUM 01] d'HUMIERES, D., LALLEMAND, P, LUO, L.-S., «Lattice Boltzmann equation on a two-dimensional rectangular grid», *J. Comput. Phys*, n°172, p.704–717, 2001.
- [GUO 13] GUO. Z., SHU, C., *Lattice Boltzmann Method and Its Applications in Engineering*, World Scientific Publishing, Singapore, 2013.
- [ZHO 04] ZHOU, J.G., *Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows*, SPRINGER, Berlin, 2004.
- [DIN 09] DING, L., SHI, W., LUO, H., and ZHENG, H., «Investigation of incompressible flow within 1/2 circular cavity using lattice Boltzmann method», *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS*, n°60, p.919–936, September, 2009.
- [YAN 12] YANG, F., LIU, L., SHI, X., and GUO, X., «Lattice BGK Study on Flow Pattern in Two-Dimensional Wall-Driven Semi-Circular Cavity», *Advanced Materials Research*, Vol 354, p.594–598, 2012.