2026, vol. 7, n° spécial LILA 3, 224-245 pages, DOI : 10.21494/ISTE.OP.2026.1439 ISTE OpenScience

A Propos de l'ordre algébrique dans le modèle ETH de la Mécanique Quantique

About the role of the algebraic order in the ETH model of Quantum Mechanics

Dmitrii TAYURSKII[1] et Alain Le MEHAUTE[1,2]

[1.]Université Fédérale de Kazan, 18, Avenue Kremlemskaya, 420008 KAZAN, Tatarstan. Fédération de Russie
[2] Materials Design, 42 rue Vernet 92120 Montrouge, France, alm@materialsdesign.com

RÉSUMÉ. La question de la décohérence associée ou non à celle de la réduction de la fonction d'onde, reste une question ouverte en Mécanique Quantique. Cette question double, dans cette science, la question toujours en suspens touchant l'irréversibilité du temps quantique. L'objet du présent article est d'aborder ces questions au travers du modèle mis au point par le Professeur J. Fröhlich et son équipe à l'ETH Zurich. Le modèle ETH prend naturellement sa place dans le cadre du projet Lîla-Entropie en particulier par le truchement de l'ordonnancement des systèmes ordonnés et emboités et de leurs liens avec l'irréversibilité du temps.

ABSTRACT. The decohering and collapsing process remains an open question in Quantum Mechanics. These processes are implicitly related to the possible arrow of time. The purpose of this article is to address these questions through the model ETH developed by Professor J. Fröhlich and his team at the Zurich. It will be noted that his model is not unrelated to the communications already published within the framework of the "Lîla-Entropie Project", especially through the ordering of nested systems.

MOTS-CLÉS. Décohérence quantique. Temps irreversible. Bifurcation. Ensembles ordonnés et emboités.

KEYWORDS. Decoherence. Collapsing Principle, Irreversible Time,Bifurcation, Ordered and nested sets.

1. Introduction

Les intenses discussions relatives à la question de la bifurcation d'états superposés en mécanique quantique, vers un l'état réduit caractéristique du déterminisme physique classique avec causalité stricte (décohérence et /ou réduction de la fonction d'onde) [JOE96], - question dont on trouvera par exemple une controverse animée entre Hervé Zwirn et Alain Connes dans la référence [ZWH21] - mettent en évidence les multiples obscurités que recèlent encore cette science qui, quoique centenaire, reste à bien des égards toujours hautement contre intuitive. On rappelle que la théorie de la décohérence, autrement dit la question de la transition quantique / classique, après les interrogations d'Einstein , de de Broglie et de Bohm, a été revivifiée [SEF84] par H. Dieter Zeh en 1970 [ZEH70]. Elle a suscité de nombreux commentaires éminents [ZUW91,05],[OMR06],[FAJ16] et reçu ses premières confirmations expérimentales en 1996 [SHR97].

Le présent article a pour objet de cerner, au moyen d'un modèle formel portant l'acronyme est ETH, un processus physique capable de rendre compte de la transition entre états quantiques (états superposés) vers un état classique (état déterminé) par exemple sous l'effet d'une mesure ou d'une fluctuation de l'environnement. L'objectif du modèle ETH est de démontrer que la réduction du paquet d'onde aboutissant à un état classique unique n'est pas en contradiction avec les contraintes hamiltonienne/lagrangienne et finalement les algèbres de von Neumann qui régissent la mécanique quantique. Cette absence de contradiction est en effet loin d'être évidente puisque de telles approches font par définition abstraction des processus locaux [STI97]

En pratique la décohérence mène non pas à un état unique, mais à un ensemble d'états mutuellement exclusifs dont les probabilités d'observation sont régies pour des raisons encore obscures par les lois de la physique statistique. La métaphore bien connue du « chat de Schrödinger » à la fois vivant et mort[1] avant d'être l'un ou l'autre sous l'effet putatif d'une observation ou plus généralement d'une interaction avec l'environnement, est une expression particulièrement bien imagée de la question du statut de la variable « temporelle », question toujours ouverte en mécanique quantique. Elle est immédiatement suivie de l'interrogation relative à l'éventuelle irréversibilité de cette variable [ZUW91,05],[RIP19],[LMA26], interrogation à ce stade sans réponse scientifique assurée [FRJ22].

On rappelle que la formalisation de la mécanique quantique parmi les plus avancées résulte d'une généralisation algébrique dite de von Neumann[2] mathématicien né hongrois [BLA24] qui partant des règles qui régissent empiriquement les transitions entre raies spectrales des atomes et utilisant l'inverse des carrées des indexes d'ordonnancement (voir par exemple le traitement algébriques des séries dites de Balmer-Rydberg), parvint à en montrer l'unité algébrique et la généralité analytique dans le corps des nombres complexes. Une telle algèbre supposant l'existence d'un opérateur de succession dans cette structure de corps, on doit au duo scientifique Alain Connes et Carlo Rovelli [COA17-94] la formalisation d'un type particulier d'irréversibilité temporelle dite thermique, adossée au théorème de Tomita-Takesaki relatif aux automorphismes modulaires [CAO94]. Susceptible d'être physiquement analogue au modèle KMS l'automorphisme est alors assimilé à l'usage d'une unité de *temps dite thermique* [RIP17]. La flèche du temps mise alors en évidence résulte d'un d'aléa propre aux méthodes quantique (conséquences de l'usage de traces partielles d'états statistiques [ZWH22]).

Au-delà du simple hasard et de propriétés thermiques à la validité toujours problématiques [COA18] on doit, à l'ordonnancement d'arborescences et d'automorphismes bi paramétrés -qui caractérisent les treillis des représentations les plus simples de toute complexité-, l'émergence une flèche du temps qui ne dépend plus du concept de température[3], mais de la nature autosimilaire donc fractale de la géométrie véhiculée par l'arborescence [RIP17],[LMA26]. On retrouvera dans le modèle ETH à la fois le rôle des arborescences ordonnées et celle de l'autosimilarité ici 2D alors associée localement au mouvement brownien standard. Exclusivement centrés sur la mécanique quantique, les travaux du Professeur Fröhlich, auteur du modèle[4], s'inscrivent dans une lignée de recherches plus générales fondées sur la théorie des catégories [LET16] [LAW12, 97], c'est-à-dire sur la théorie des adjonctions et des foncteurs ici traités en séries.

La revue cursive de l'état des lieux de la décohérence proposée au travers du modèle ETH devrait permettre au lecteur de comprendre l'intérêt, l'originalité et la radicalité des travaux de physique mathématique menés au *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* d'où l'acronyme proposé auquel se trouve alors néanmoins accolée une signification physique : E, pour Evènement T pour arborescence (Tree), sous réserves pour les auteurs de cette note Temporalité voire Treillis [LMA25] et H pour Histoire [FRJ22]. Ce modèle vise à rendre claires les avatars et les explications pour le moins embrouillés et abscons attachés à une décohérence quantique dont, bien des livres de vulgarisation et de pédagogies se font l'écho bruité.

[1] Le mécanisme qui conduit à l'état final dans lequel se trouve le chat de Schrödinger repose sur le postulat de réduction du paquet d'onde qui stipule que cet état final est le résultat d'une projection sur un seul état propre (vivant ou mort), les autres états étant inaccessibles à l'observation. Avec cette définition de l'état final d'un système, l'unicité de l'état macroscopique découle implicitement de l'exclusion des autres états qui elle-même est une conséquence de la décohérence quantique.

[2] …soit encore une C*-algèbre particulière faisant jouer un rôle spécifique au carré de fonctions intégrables et à l'opérateur unité

[3] Température qui d'ailleurs perd son sens thermodynamique habituel d'intensité relatif à une variable entropique dont on rappelle qu'elle n'a de sens que relativement à une base de cycles, en particulier au cycle idéal de Carnot et aux états d'équilibres locaux qui le caractérise [STI03].

[4] … dont le présent article est un simple écho à l'attention des lecteurs d'Entropie [FRJ22][FIF04][FAJ16][FRJ15]

En formalisant des lois de bifurcations (E) certes aléatoires mais hiérarchisées (T) et historicisées (H) et en explicitant le fondement rationnel de la règle de Born qui associe des probabilités à l'existence d'ondes quantiques mal localisées par le truchement du carré d'une amplitude, les travaux ici référencés sous l'acronyme ETH rendent compte des processus qui déterminent la projection d'états superposés sur un seul état final (éventuellement mixte) en jouant de lois du hasard inscrites implicitement dans une arborescence « causales ». Certes de manière limitée mais cependant localement adéquate, ces lois imagent le mouvement brownien 2D que l'on retrouve dans les géométries de Guiseppe Peano. Dans le cas particulier marqué par l'absence du besoin de complétion arithmétique [LMA26] la mécanique quantique peut se contenter de l'usage d'un temps newtonien, c'est-à-dire la confusion du temps de la mesure et du temps des processus. Ce lien est alors adossé à des formes quadratiques. En mécanique quantique donc le temps passe selon une indexation arithmétique voulue standardisée.

Attaché à une mécanique non relativiste[5] le modèle ETH s'appuient fondamentalement sur un principe aristotélicien intuitif selon lequel dans un système fini, par actualisation les potentialités d'action déclinent, au fil de leurs réalisations. (Principe PDP : Potential Diminution Principle).

A certain égard le point de vue ETH, qui suppose l'existence d'un axe temporel 1D bien ordonné adjoint à une paramétrisation horizontale de l'arbre des multiples potentialités supposées également ordonnées selon un axe supplémentaire 1D, se distingue nettement du point de vue développé par le projet Lîla-Entropie. Ce dernier focalise entre autres l'analyse de toute émergence (d'un ordre, d'une forme, du vivant, etc) sur *la variation, sous l'effet d'une arborescence, de la composante temporelle de tout processus irréversible, variation vue comme un écart* à l'idéal thermodynamique fondé sur la seule statistique d'équilibres successifs. En considérant le temps comme une dualité complexe, le projet met en question tout autant son l'indexation standard[6] que les symétries d'actions propres à la mécanique quantique pour leurs parts associées aux formes quadratiques. Néanmoins les deux approches se rejoignent en particulier par le biais de l'arborescence puisque dans le cas spécifique de la mécanique quantique, la fonction zêta qui sert d'horloge complexe au processus interne [RIP17,19] [LMA26], répond alors à l'hypothèse de symétrie fonctionnelle de Riemann ($s=\alpha+i\theta$ avec $\alpha=1-\alpha=1/2=1/d$: $d=2$ dimension fractale d'un mouvement brownien : 1D x 1D) [RIP17]. Cette contrainte garantit la pertinence du point de vue lagrangien/hamiltonien. Il n'y a donc pas contradiction entre le projet Lîla Entropie et l'approche ETH mais illustration du rôle d'un modèle d'ordonnancement implicitement ou explicitement fondé sur la fonction zêta lorsqu'elle répond à l'hypothèse de Riemann [KEJ00]. Ce constat, lié en profondeur à la distribution des nombres premiers (y compris implicitement au travers du statut distinct de $\mathbb{N}=\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$ [ZUH22]), ramène au cas stochastique pur avec usage des hypothèses de projections orthogonales et usage de considérations diagonales d'états propres en l'absence de corrélations annexes (modèle ETH). Les contraintes propres à la mécanique quantique contraignent donc génériquement le modèle ETH. Les rapprochements pointés ci-dessus expliquent la présence du modèle ETH dans le développement du projet Lîla Entropie

On observera à ce propos que le modèle repose sur des ensembles ordonnés et bornés mettant en jeu y compris explicitement le rôle de la notion de filtre, filtres que nous retrouvons au-delà de la mécanique quantique dans la généralisation fractionnaire de l'approche des dynamiques complexes [RIP24]. L'existence d'une flèche du temps est dans le modèle ETH lié à un passage à la limite (structure diamant), passage qui reste une question ouverte de l'avis même du concepteur du modèle J Fröhlich [FRJ15-22]. Le présent article, dont la visée est l'ingénierie, se bornera à rappeler les attendus

[5] Celle-ci poserait alors immédiatement de sérieux problèmes d'ordonnancements spatio-temporels,

6 alors remplacée par un ordre dépendant d'un couplage échelle-temps associé à la fonction zêta sur des espaces localement annelés [RIP24],[ALM24]

principaux du modèle ETH en renvoyant le lecteur aux travaux des auteurs cités et à leurs communications publiques[7].

2. Théorie ETH selon son concepteur le Professeur Jürg J. Fröhlich

Pour le Professeur Fröhlich l'acronyme ETH ne signifie donc pas uniquement l'institution dans laquelle le modèle a été créé, mais correspond comme indiqué ci-dessus à une signification associée à une physique quantique sur l'Espace-Temps: E pour l'Evènement qui y trouve place, T pour le Tree (Arborescence) ou la temporalité qui en contrôle la dynamique et H pour l'Histoire donc la mémoire dont il faut tenir compte pour concevoir des corrélations entre évènements distribués entre autre sur un axe de temps 1D. En préparant quantiquement le système S dans un état initial donné, l'approche ETH a pour objet de modéliser l'évolution qui animera S en précisant à chaque instant ce qu'est l'état actuel *versus* un état potentiel fini mais ouvert. Le modèle considère conjointement les processus de bifurcations internes (axiome CP) associées à un arbre de potentialités en diminution permanente sous l'effet de réalisations actualisées. Dans ce contexte les principes de la mécanique quantique méritent d'être eux-mêmes actualisés. On peut affirmer que cette science est principalement fondée sur 4 piliers :

1. Des quantités physiques sont représentées non par des mesures, chiffrées par exemple dans le corps $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, mais par des opérateurs auto adjoints[8]. L'auto-adjonction traduit la contrainte forte imposée par un type particulier de symétrie dite involutive (dualité catégorique) facilement représentée sur un corps de représentation comme l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Par exemple une mesure peut être attachée au module mais la position de l'affixe peut rester libre d'actions dans le plan d'Argand. Partant, on suppose qu'on est capable de construire des opérateurs dérivés dits de densité sur l'Espace-Temps (moment spin énergie, champs etc) tout en conservant la distinction entre les grandeurs intensives (espace des quantités, mesures) des grandeurs extensives (quantités d'espaces, bilans) [LAW 97,12]
2. Une évolution temporelle utilisant des opérateurs unitaires, adossée aux équations de Heisenberg est utilisée. Les opérateurs quantiques font ici implicitement ou explicitement référence à une horloge de référence. En dépit de la présence de cette horloge au statut hybride (interne et externe) Heisenberg introduit la référence à un système isolé. Poser cet isolement soulève immédiatement lors de l'évolution le besoin putatif d'interactions nécessairement faibles, avec une extériorité telle que par exemple un observateur opérant une mesure voire une simple l'immersion dans un environnement supposé fluctuant. Pour cette raison on qualifiera le système de système isolé ouvert. La notion de fermé ouvert en topologie pourrait être convoquée.
3. Deux notions d'états distinctes sont considérées: l'état des potentialités (superposées) suivi d'états actualisés (réalisés , observés, mesurés). L'évènement E correspond au passage de l'un à l'autre. La notion d'état n'est ici en rien ontologique mais relève d'un empirisme dont le formalisme de la mécanique quantique n'est que l'écho catégorique.
4. Alors que selon l'interprétation de Copenhague, la question de la mesure et de toute bifurcation entre états est une question restant en suspens, la proposition du Pr. Fröhlich a pour objet de

[7] On notera que le Professeur Fröhlich avait initialement donné son accord à une communication en français dans le cadre du projet Lîla Entropie, avant qu'un accident familial inattendu ne l'amène à renoncer à un travail auquel il aurait dû consacrer un temps dont il ne disposait plus (communication personnelle)

[8] La définition d'une variable de mesure tel que le temps, est une application d'un ensemble X dans un corps tel que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Or du fait de cardinalité distinctes entre les deux corps algébriques possibles, une variable dénombrable (extensive) est incompatible avec une variable continue (typiquement intensive). Les deux grandeurs doivent être distinguées comme le fait par exemple Lawvere [LAW12] . L'usage des opérateurs lève cette incompatibilité mais introduit en contrepartie une éventuelle non commutativité. La conséquence de celle-ci et des propriétés échelles associées, conduisent à l'apparition d'une flèche du temps à minima thermique [COA94,17]

faire de cette question un des piliers du modèle ETH en pratique le 5ème pilier de la Mécanique quantique. On observera que non relativiste ce modèle, impliquant le temps, repose néanmoins sur le cône d'évènements posé par la relativité incluant le cas où la vitesse c de la lumière tend vers l'infini.

Malgré la rigueur et l'efficience du formalisme abstrait mis en place et malgré la précision exceptionnelle des mesures qui peuvent être déduites de la théorie (typiquement l'épaisseur d'un cheveux sur la distance Paris-New York selon Alain Connes), de multiples questions épistémologiques restent ouvertes à propos du réalisme *versus* l'idéalisme d'un modèle quantique de la mécanique (MQ) qui a désormais un siècle d'âge.

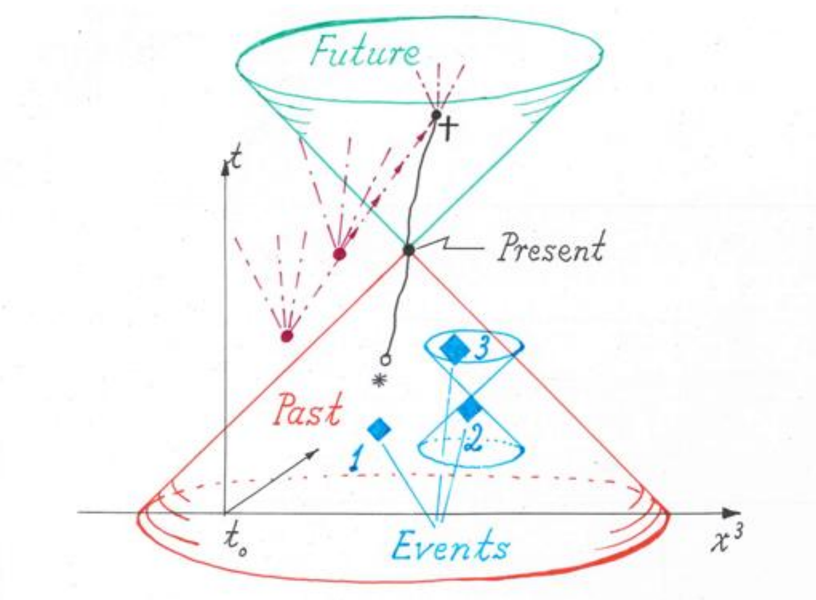

Figure 1. *Crédit J. Fröhlich communication faite à l'ENS Lyon 2022 : Cette figure donne une image de l'Espace-Temps contraint par la limite de vitesse de la lumière, et contenant l'horizon des évènements (l'observateur au présent ignore tous les cônes passés ; l'avenir ne peut lui être prédit). t_0 est le temps de référence après inflation ; conditions initiales évidemment inaccessibles. Le passé est l'Histoire de ce qui s'est déjà actualisé. Mal référencé le passé n'est pas assuré en mécanique quantique [ZWH22]. Le futur correspond à l'ensemble des potentialités.*

Par exemple :

1. Comment la Mécanique Quantique distingue t- elle le passé du futur si l'on s'en tient à l'usage du temps newtonien donc réversible propre aux modèles de Heisenberg et Schrödinger ? Le potentiel et l'actuel aristotéliciens ne semblent ni simplement ni même correctement pouvoir être distingués dans l'approche quantique.
2. Comment penser l'inadéquation des équations de Schrödinger lorsque sont évoquées les transitions entre états distincts ? Contraintes par la linéarité, les équations habituelles n'évoquent que des états superposés, donc ni basculement vers un état unique par exemple lors d'une mesure (réduction de la fonction d'onde), ni transition entre états exclusifs les uns des autres (décohérence). En particulier la réduction des états superposés et la décohérence de même que l'aléa quantique, donnent lieu à des explications systématiquement confuses [ZWH22].
3. Pourquoi le problème de la transition (directe et projective ou indirecte et surjective) exige-t-il de convoquer la théorie des probabilités ? Le théoricien et l'expérimentateur sont en effet confrontés aux propriétés de non séparabilité des états qui doivent conjointement répondre à un comportement global tout en ayant des propriétés de « point catégorique » au moins partielles ;

voilà pourquoi les fondements théoriques de l'intrication quantique conduisent à des questions encore ouvertes. La théorie des probabilités n'est en soi qu'une composante de la pensée contrainte par une normalisation questionnable pour des systèmes non séparables donc intriqués. L'usage de telle normalisation eu égard à des algèbres non booléennes par exemple telles celles de Heyting conduit l'ingénieur à être dubitatifs. Par quel biais cognitif l'usage d'une mesure de probabilité traduit-elle en Mécanique Quantique la jonction local/global donc la jonction quantique / classique que nous prétendons approcher dynamiquement ?

4. L'approche quantique de l'ETH doit enfin être cohérente avec un usage du cône relativiste associé à l'évènement y compris si le traitement pour une vitesse de la lumière infinie (cas classique) est ici utilisé. Cette approche relativiste repose sur le cône passé/futur tel que représenté dans les exposés de l'équipe du Professeur J. Fröhlich (Fig.1). Comment se cône s'adapte-t-il avec l'existence du temps cyclique de Heisenberg associé à l'opérateur unitaire ?

Ainsi peuvent être brièvement résumées quelques questions qu'un béotien peut se poser en abordant les travaux menés à l'ETHZ. Comme indiqué, une des multiples difficultés conceptuelles qui caractérisent la mécanique quantique [SEF84] tient à ce que l'équation de Schrödinger étant analogue à une équation de diffusion sous champ avec $\vartheta(t,\vec{r}) = \kappa\psi$, la fonction d'onde de probabilité du système

$$(i\hbar)\frac{d\vartheta(t,\vec{r})}{dt} = -\frac{(\hbar)^2}{m}\Delta\vartheta(t,\vec{r}) + V(\vec{r})\vartheta(t,\vec{r})$$

ne peut en aucun cas décrire la dynamique de transition entre état mais les états stables de structures complexes représentables pour des raisons de cohérences algébrique aux moyens d'opérateurs auto adjoints. Cette équation définit les états du système et plus précisément les états superposés de tout couple de particules. Cette superposition est en lien avec la multiplicité et les automorphismes qui caractérisent la fonction zêta de Riemann qui est une solution de l'équation de Schrödinger [LMA26] Plus fondamentalement le paradoxe induit par le formalisme de la Mécanique Quantique tient au fait que, en dépit de l'usage d'un temps standard, le passé n'est pas mieux déterminé de manière précise et assurée que l'avenir. L'aléa du quantique vaut donc aussi pour l'histoire du système dont la multiplicité devient alors une des caractéristiques fondamentales [ZWH21]. Par ailleurs, il apparait qu'en dépit de l'usage systématique qu'en fait la mécanique rationnelle, la notion de temps comme opérateur de succession sur une ligne de variabilité, n'est en rien pertinent pour nombre de systèmes complexes hautement intriqués dont la taille, le plus souvent très éloignée de l'échelle humaine, joue un rôle dans l'ordre de succession arithmétique [RIP24]. La mécanique quantique se présente cependant comme un cas intermédiaire dans lequel pour des raisons d'interaction avec l'observateur, de symétries, de compacité et de clôture métrique, le temps newtonien conserve une part de sa signification habituelle en justifiant à posteriori l'usage qui en est fait. Comme en mécanique rationnelle cette part limitée par un caractère ici cyclique (opérateur unitaire) est néanmoins opératoire pour représenter le temps qui passe comme un déploiement sur une droite 1D. Il est par ailleurs admis par les pédagogues que la décohérence et l'obtention d'un état exclusif des autres états possibles (ou d'un état unique par réduction de la fonction d'onde) éventuellement mixte, tient en physique quantique, à la mesure appliquée par l'observateur objet/sujet macroscopique et plus généralement à une interaction du système avec un environnement bien plus grand que lui le ramenant à un état classique. Cette interprétation[9] est épistémologiquement problématique et engendre controverses et paradoxe comme par exemple celui des 2 amis de Wigner (Fig.2).

[9] Echange Hervé Zwirn et Alain Connes L'homme a besoin d'écrire une histoire : www.bing.com/search?q=zwirn+connes+video&form=ANSPH1&refig=e015cb9bda3349a6ba1c6f63ef2340e8&pc=LCTS

En dépit de toutes les questions ouvertes la notion de temps, c'est-à-dire d'un opérateur de succession arithmétique standard est à priori[10] supposé pouvoir être utilisé. Le scientifique attaché à cette problématique doit donc retrouver une loi d'évolution irréversible adaptée à une mécanique discrétisée, loi susceptible de donner lieu à l'élaboration d'une Histoire. Tel est l'enjeu que relève les concepteurs de l'approche ETH. On observera qu'il s'agit ici d'une Histoire et non de plusieurs histoires en concurrences les unes avec les autres. On observera que cette contrainte conduit *in fine* à justifier l'usage des probabilités, la loi d'évolution opérant alors en moyenne lorsque les états en question sont mixtes [STI 97].

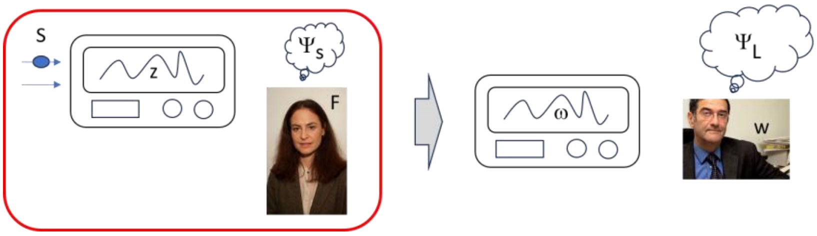

Figure 2. *Echelle de perception : Les prédictions quant au futur pour F (partant de l'évolution unitaire de l'état initial) compte tenu des états z ou de ω sont différentes. F prophétise des états superposés alors que W accède à un unique état déterminé. L'extériorisation de l'ami de l'observateur n'est pas une transformation unitaire dans le temps. Cette incompatibilité apparente de deux approches de la théorie quantique (l'évolution déterministe et continue dans le temps de l'état d'un système fermé et l'effondrement probabiliste et discontinu de l'état d'un système au moment de la mesure) traduit la difficulté de penser l'irréversibilité lors de l'obtention de l'information [WIE67].*

3. Introduction à une approche de la Mécanique Quantique Non relativiste au moyen du modèle ETH

3.1. *Les paradoxes induits par l'école de Copenhague*

Reprenons l'approche de la Mécanique Quantique proposée par l'école de Copenhague. Soit S un système physique. Toute quantité physique sur S {variable} est représentée par des opérateurs auto adjoints $\hat{X} = \hat{X}^* \in O_S$. Il en résulte que toute fonction continue bornée F : $F(\hat{X}) \in O_S$; O_s ne possède aucune structure à priori. On introduit le temps newtonien comme paramètre fondamental extérieur aux grandeurs-système. Il est supposé relever du corps des réels ($t \in \mathbb{R}$)[11]. Le modèle ETH fait aussi usage de l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$ utilisant le principe de discrétisation du temps ($t=n\tau$ avec $\tau>0$ et $n \in \mathbb{N}$) en conservant en particulier la caractéristique archimédienne. Le temps ainsi défini assure le paramétrage de l'évolution de S. Pour chaque valeur de t appartenant à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{N}$, il existe une représentation temporalisée $B(H_S)$ de O_s[12] dans un espace de Hilbert H_S séparable borné. $B(H_S)$ est donnée par l'algèbre de tous les opérateurs auto adjoints bornés agissant sur H_S. Selon les principes de la Mécanique Quantique l'évolution temporelle qui intéresse le chercheur répond donc à l'application

$$O_S \ni \hat{X} \rightarrow X(t) = X(t)^* \in B(H_s)$$

Dans tous les exemples concrets X(t) est localisé dans l'Espace-Temps (théorème de Rudolf Haag). Si l'on suppose que l'opérateur représentant la quantité physique est localisé dans un intervalle de

[10] … à la différence de ce que l'on propose pour des systèmes non-séparable en associant un ordonnancement donc une temporalité interne à la fonction zêta. de Riemann Ce distinguo s'efface dans le cas de la mécanique quantique du fait du caractère autoadjoint des opérateurs, involution et symétries assimilables à l'hypothèse de Riemann et à l'usage des probabilités [RIP7-19] e t[LMA25].

[11] …et ce en dépit des difficultés pointées tant par Alain Connes (voir ci-dessus) que par Philippe Riot ($\mathbb{R}$ est un ensemble continu de nombres analogues à des nombres premiers incompatible entre eux)

[12] O_S est une liste continument indicée d'opérateurs auto d'adjoints majoritairement non commutables. Il ne s'agit pas d'un espace vectoriel habituel.

temps donné I_x, on suppose la validité de la relation suivante : $I_{F(X)} = I_x$ pour toute fonction F continue bornée. Le point de vue de Heisenberg affirme que l'évolution de l'opérateur X(t) représentant la variable physique $\hat{X}$ pour le système isolé S, est donné par un propagateur U_S fondée sur une conjugaison telle que pour t *et* t' $\in \mathbb{R}^+$ alors $X(t') = U_S^*(t'-t)\, X(t)\, U_S(t'-t)$. Si H est l'hamiltonien de *S* , *U_S est un propagateur unitaire « autonome » sur S si et seulement si celui-ci est associé à un cycle* donc implicitement à l'état congruent d'une horloge. L'autonomie s'exprime alors sous la forme exponentielle : $U_S = \exp[-i(t'-t)H/\hbar]$ avec les notations habituelles, soit encore l'équation d'évolution de Heisenberg par ailleurs bien connue utilisant les notations habituelles

$$X(t') = e^{\frac{2i\pi(t'-t)H}{h}}\, X(t)\, e^{\frac{-2i\pi(t'-t)H}{h}}$$

Nonobstant le fait qu'un cycle et sa constante de temps réfèrent explicitement à une analyse de type harmonique[13] et détermine donc au moins implicitement une extension d'incertitude en termes d'échelle de mesure (transformations de Fourier ou en ondelettes), on ne voit apparaitre directement et à ce stade aucune notion de probabilité susceptible d'être liée au temps. En pratique, la probabilité apparait avec l'usage de la matrice densité Ω. Les états de S, sont alors donnés selon von Neumann, comme mélange statistique par la matrice en question soit encore la classe des opérateurs trace sur H_S alors normalisés à 1. La probabilité de trouver l'opérateur dynamique $\hat{X} \in O_S$ dans l'état Ω au temps t est alors donnée par l'état $\omega[X(t)] := \mathrm{Tr}[\Omega X(t)]$. ω est un état pur si et seulement si il est associé à une projection π de rang-1 [14] tel que $\pi=\pi^*=\pi^2$. On rappelle que l'entropie du système est alors donnée par $\mathfrak{S}=-k_B \mathrm{Tr}\,[\omega\log(\omega)]$ où k_B est la constante de Boltzmann.

Le Professeur Fröhlich insiste sur les défauts de conception attachés à l'équation de Heisenberg et, en conséquence, sur les défauts de la représentation ondulatoire proposée par Schrödinger voire sur la limitation des axiomes de l'algèbre de von Neumann. Puisque l'équation de Heisenberg conduit à des états indépendants du temps qui passe (le temps comme variable y est en effet alors algébriquement marginalisé : variable muette), il en résulte que le lien entre les équations de Schrödinger et celle de Heisenberg[15] a nécessairement pour origine la permutation de la position du temps entre l'opérateur et la matrice densité, dans l'écriture de la trace, soit

$$\omega[X(t)] = \mathrm{Tr}(\Omega X(t)) = \mathrm{Tr}(\Omega(t)X) \text{ avec } \Omega(t') = U_S^*(t'-t)\,\Omega(t)\,U_S(t'-t) \text{ où } X := X(t_0) \text{ et } \Omega(t_0) := \Omega$$

La trace porte l'information temporelle par le truchement de la matrice densité Ω. Ainsi conformément à la représentation issue de l'équation de Schrödinger, les grandeurs physiques d'un système S restent représentées par des opérateurs bornés X *indépendants du temps* sur H, tandis que les états de *S* dépendent du temps d'une manière décrite par l'équation probabiliste donnant comme ci-dessus Ω(t') ou, de manière équivalente, par l'équation de Schrödinger-Liouville-von Neumann :

$$d\Omega(t)/dt = -i[H(t), \Omega(t)]/\hbar$$

La trajectoire du système n'est donc plus alors déterminée qu'en moyenne probabiliste. On peut définir des traitements plus généraux par exemple au moyen d'opérateurs linéaires répondant aux règles de convolutions successorales $\Gamma(t,t') = \Gamma(t,t'')\,\Gamma(t'',t')$ avec $\Gamma(t,t)=\mathbf{1}$ et $t' \geq t$ en écrivant par exemple $\Omega(t)=\Gamma(t,t')[\Omega(t')]$ toutefois cette extension ne change rien au formalisme de base attachant l'évolution temporelle à la matrice densité.

[13] …qui ne dispose pas nécessairement de transformation inverse [LMA26].

[14] On notera l'analogie algébrique avec la relation d'autosimilarité attachée à l'ensemble des nombres naturels : $\mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

[15] Les communications relatives au modèles ETH distinguent Ω avec tilde pour l'approche Heisenberg de et Ω sans tilde pour l'approche Schrödinger au temps t=0. Pour des raisons de simplifications on ne fera pas cette distinction ici bien qu'elle figure dans les publications relatives au modèle ETH [FRJ15-22] .

3.2. *Comparaison avec les fondements statistiques des lois de diffusion standard*

Nonobstant l'incompatibilité cardinale entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ [COA94] [RIP17-19] on observe qu'en Mécanique quantique par essence discrète, la dynamique permettant de définir les états stables selon l'approche de Schrödinger, est formalisée de manière continue et déterministe. Hugh Everett [EVH57] suggère que cette approche suffit pour retrouver toutes les prédictions de la représentation matricielle initiale de la mécanique quantique mais que celle-ci conduit alors à un multivers. *En l'absence du processus de décohérence, l'univers se trouverait ramifié en une superposition de mondes séparés, empiriquement exclusifs les uns des autres.*

Le paradoxe liée à ce point de vue est peu compatible avec l'expérience (par exemple celle de Stern et Gerlach) qui ne montre aucune multiplicité des mondes ceux-ci étant seulement concurremment probabilistes, d'une part parce que l'évolution déterministe peut être interrompue à tout moment (par exemple par le truchement d'une mesure) ou même parce que la stationnarité sur la trajectoire (intensité ou quantité d'espace *versus* extensité ou espace des quantités [LAW12]) implique l'existence d'un Laplacien local (émission/absorption, donc une fluctuation) donc d'une équation de diffusion sous-jacente [KIC61]

$$d\vec{r}(x)/dt \sim D.\Delta \vec{r}(x)$$

avec *D* coefficient de diffusion de dimensions $[L^2t^{-1}]$) coefficient dont on connait les liens avec le mouvement brownien[16]. Wiener suggère qu'il existe alors une mesure de probabilité sur l'espace des trajectoires possibles $\xi \in \Xi$ dès lors qu'elles sont continues et d'index de Holder[17] de valeur ½. On peut alors construire des moyennes et ce sont ces moyennes qui déterminent l'ensembles des trajectoires déterministes concevables $\Xi : \{ \xi \}$. Un évènement au temps t sur la trajectoire ξ est alors telle qu'il existe une variable-opérateur notée $X_\xi(t)$. La pertinence de la mesure de Wiener $dW_{x_0}(\xi)$ assure alors qu'il est possible de calculer une moyenne à partir des probabilités sur des classes de trajectoires prises dans l'ensemble Ξ de l'histoire-trajectoires et partant, de retrouver une loi déterministe (par exemple les lois de diffusion) vues comme moyennes sur l'ensemble des histoires particulières. La trajectoire comme histoire des évènements peut alors être vue comme un objet aléatoire autonome et l'espace des trajectoires comme l'ensemble des histoires possibles ; soit $\Xi := \{ (\xi | x_\xi(t) \in \mathbb{R}^3 | t > t_0 \ , \ x_\xi(t_0) = x_0 \}$. L'index de Holder α=½ traduit géométriquement l'absence d'extériorité (courbe de Peano)[18] donc implicitement rappelle l'autonomie du système. Ce point est ici tout à fait fondamental car il singularise la mécanique quantique dans la classe des systèmes complexes généralement ouverts infinis et non bornés mais aussi généralement autosimilaires mais de dimension cantorienne différente de la valeur ½ [BAB82],[RIP19],[LMA26] . En reprenant le raisonnement quantique, la densité locale

$$\rho_t(x)=\int_{\mathbb{R}3} dx_0{}^3\Gamma_{t-t0}(x-x_0)\rho_{t_0}(x_0)$$

comme expression d'une convolution peut être séparée en faisant jouer les probabilités de Wiener comme fonction test [RED94], [EKN05]; soit encore :

$$\rho_t(x)= \int_{\mathbb{R}3} dx_0{}^3\Gamma_{t-t0}(x-x_0)\rho_{t0}(x_0) = \int_{\mathbb{R}3} dx_0{}^3\rho_{t0}(x_0) . \int_\Xi dW_{x0}(\xi)\, \aleph\, (\xi|x_\xi(t)=x).$$

[16] La solution de l'équation de diffusion est donnée par $\rho_t(x)= \int_{\mathbb{R}3} dx^3\Gamma_{t-t'}(x-x')\rho_{t'}(x')$ dont la solution $\Gamma_t(x):=(2\pi Dt)^{-3/2} \exp(-|x|^2/2Dt)$. Le noyau de convolution satisfait l'équation de Chapman Kolmogorov

[17] On rappelle que l'inégalité de Holder pour la séparation des fonctions Riemann intégrables, impose pour les indexes de séparation conjugués p et q : $(1/p)+(1/q)=1$ et donc l'index ½ est liée à l'auto-conjugaison, c'est-à-dire empiriquement des choix binaires équivalents.

[18] On fera attention à ce que le mouvement Brownien standard est de coefficient de Holder strictement inférieur à 1/2

On dit que *les techniques probabilistes dénouent l'équation de diffusion en donnant une signification statistique au Laplacien* [KIC61]. De manière analogue le modèle ETH se propose de dénouer en Mécanique Quantique l'équation de Schödinger-Liouville (SL)

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{H},\widehat{A}(t)\right] = \left\{\widehat{H},\widehat{A}(t)\right\} + O(\hbar^2)$$

$$\frac{d\widehat{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{\rho},\widehat{H}\right]$$

donnant alors de fait, une représentation statistique à la propagation des états quantiques. L'idée est de considérer la représentation SL comme une moyenne sur des évolutions qu'il convient de traiter statistiquement au moyen de l'opérateur matrice densité. Dès lors l'ontologie de la mécanique quantique peut être associée à un espace historique (par essence non commutatif du fait de l'aléa « quantique ») d'évènements fondamentalement aléatoires, supposés gaussiens mais portant sur des opérateurs indexables selon des séries (trajectoires) ou parallèles (les classes de trajectoires), répondant à une mesure de probabilité particulière, celle de Wiener. La tache alors assignable aux modèles consiste à trouver la mesure de probabilité adaptée ou dit autrement, de trouver les états quantiques pertinents et leurs modalités d'indexation par un automorphisme afin de donner une signification à une variable de succession appelé un « temps ».

4. Rôle de l'ordonnancement dans le modèle ETH

Si *S* est équipé d'un « saut quantique » il l'est vers un état inscrit dans la plage de projection spectrale π de X(t) . Cet état correspond à une valeur propre égale à la valeur de $\hat{X} \in O_S$ mesurée à l'instant t.

Les règles de la mécanique quantique donnent la probabilité de sauts vers des états correspondant à différentes valeurs propres. Ces probabilités sont données par la règle de Born selon laquelle la probabilité est associée à la norme de la fonction d'onde. Toutefois cette règle empirique donne lieu à critiques si les appareils utilisés pour mesurer la valeur propre sont inclus dans l'ensemble qui constitue le système total S (supposé isolé mais ouvert) on pourrait s'attendre (à tort pour la critique) à ce que l'événement associé à une mesure de la valeur propre de X soit considérée comme un résultat de l'équation de Schrödinger-Liouville, donc d'une évolution de l'état du système global. Cela impliquerait que la mécanique quantique soit déterministe [SEF84] ce qui n'est pas le cas [NEJ38]! On voit ici que la question posée par l'usage de la variable temporelle est particulièrement subtile et que, dans le cadre d'une mécanique discrétisée, elle relève à minima de la dualité locale/globale. Dans cette hypothèse l'ordonnancement indexable de l'ensemble des valeurs propres [ROG64] dont tout le projet Lîla Entropie est précisément l'écho, devrait jouer un rôle y compris pour établir le statut d'une flèche du temps éventuelle. Cette hypothèse relève d'une contradiction dès lors que le temps newtonien est dépendant du principe de Noether (invariance par rapport aux coordonnées spatiaux temporelles initiales). Bien que l'usage du temps newtonien soit acté en mécanique quantique, on retiendra ici le besoin de penser ce temps dans un cadre différent du cadre traditionnel et on comprendra mieux dès lors la disruption cognitive apportée par le projet ETH. Il s'agit en effet de mettre en œuvre un principe additionnel aux principes et axiomes habituels qui pour l'essentiel conduisent à des états stables[19]. Le modèle ETH apporte une toute autre approche du modèle quantique en introduisant ce que l'auteur appelle une « histoire évènementielle ».

[19] On notera que pour la partie mécanique les principes en jeu sont ceux des symétries d'Emmy Noether induisant les invariants fondamentaux tels que par exemple l'énergie (invariance en translation) ou le moment angulaire (invariance en rotation).

4.1. *Principe PDP de diminution des potentialités*

Pour ce faire le modèle ETH propose de considérer un intervalle arbitraire I : $I \subset [t_0, \infty]$ où t_0 est ici le temps présent. On peut alors définir une algèbre stellaire[20] $\mathcal{E}_I$, générée par la combinaison linéaire des produits finis arbitraires portant sur les intervalles. On peut alors définir des algèbres faiblement bornées avec $t \in \mathbb{R}$ (Il y a un intérêt à considérer les algèbres de von Neumann et leurs dérivées car la projection spectrale de l'algèbre appartient alors à la même algèbre). Le principe mis en œuvre repose sur la relation d'ordre stricte suivante $\mathcal{E}_{\geq t'} \subset \mathcal{E}_{\geq t} \subset \mathcal{E}$ pour tout t'>t (expression pivot du principe de perte de possibilité par actualisation ou PDP). Si $\overline{V}$ représente le complément du produit des algèbres de toutes les potentialités ici pointées postérieures au temps t ;

$$\varepsilon_{\geq t} := \overline{V}_{I \subset [t, \infty]} (\varepsilon_I) \text{ et } \varepsilon := {}_{||.||} \overline{V}_{t \in \mathbb{R}} (\varepsilon_{\geq t})$$

$\mathcal{E}_{\geq t}$ n'est autre que l'algèbre de toutes les potentialités de bifurcation pour un temps supérieur à t. La clôture de la partie droite de l'équation est considérée dans une topologie associée à une convergence faible sur H_S. Les algèbres évènementielles discrétisées $\mathcal{E}_{\geq n}$ si $t=n\tau$ sont alors unitairement analogues à une algèbre universelle séparable telle que $\mathcal{N}=\varepsilon := A_{I\geq 0} \otimes B(h_s)$

Le fait que $\varepsilon_{\geq n} \cong \varepsilon$ permet de définir le spectre non commutatif global $\mathcal{Z}_S := U_\omega(\omega, Z_\omega(\varepsilon))$ comme l'union disjointe sur les états normaux ω définis entre autres par le centralisateurs restreints à l'algèbre ε des seuls états normaux (voir plus avant). L'algèbre $Z_\omega(\varepsilon)$ étant alors abélienne ses projecteurs $\pi(\varepsilon)$ donnent une description des évènements actuels permis par le système S quand il occupe l'état ω. En notant γ les *-endomorphismes de l'algèbre ε correspondant à une translation de temps unitaire dans la représentation de Heisenberg on a $\varepsilon_{\geq 1} \equiv \gamma(\varepsilon) \subset \varepsilon$. Si la translation dans le temps et unitairement applicable dans l'espace vectoriel H_S, alors $\gamma(X)=\Gamma^{-1}X\,\Gamma$ pour $X \in \varepsilon$ où Γ est l'opérateur de décalage temporel unitaire sur H_S. L'algèbre ε étant donnée ainsi que l'endomorphisme $\gamma(\varepsilon)$, ε est alors équipé d'une structure de groupoïde associée à la succession dans le temps. Ainsi : $\varepsilon_{I'} \subseteq \varepsilon_I$ si $I' \subseteq I$ et $\varepsilon_{\geq t'} \subseteq \varepsilon_{\geq t}$ si $t' > t$ et donc ici sous réserve de la préservation du point fixe commun, de la norme et du produit scalaire dans Hs, la contrainte ensembliste est donnée par

$$\mathcal{E}_{\geq t'} = \{e^{i(t-t')H}\ X\ e^{-i(t-t')H}\,|_{X \in \varepsilon_{\geq t}}\} \subseteq \mathcal{E}_{\geq t'}$$

Pour une paire d'état (ω,ω') l'application telle que $\omega \rightarrow \omega'$ n'existe que si et seulement si on peut définir une projection orthogonale minimale sur l'algèbre $Z_\omega(\varepsilon_{\geq 1})$ telle que pour $\omega(\pi)>0$ et pour $X \in \varepsilon$ on ait

$$\omega'(X)=[\omega(\pi)]^{-1}\,\omega(\pi\,\gamma(X)\,\pi)$$

En faisant le lien avec les travaux de Philippe Riot [RIO24] à propos de ceux de Roca [ROG64] sur les ensembles ordonnés, on observera, que l'important est que les ensembles en jeu touchant ici les algèbres sur les intervalles temporels répondent à des structures d'ordre et à des combinatoires

---

[20] Une algèbre stellaire est une algèbre de Banach, c'est-à-dire analogue à un espace vectoriel normé complet sur le corps des complexes, munie d'une involution notée *. Il s'agit d'un outil important de la géométrie non commutative associée à une représentation unitaire de groupes localement compacts. Par exemple l'algèbre des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini entre dans cette catégorie. La structure algébrique détermine la norme donc la topologie donc la continuité des morphismes. Le spectre de l'algèbre, qui suppose l'existence d'un opérateur unité s(x) joue alors le rôle d'une base de représentation.

spécifiques ; elles apparaissent ici emboitées les unes dans les autres comme des doubles poupées russes, algèbres alors indexables de manières ordonnées, par analogie selon une certaine temporalité.

On conçoit à partir de là que le modèle ETH puisse construire, -loin des vagues propositions relatives à la réduction de la fonction d'onde dont se font l'écho les analyses habituelles quant à la complétude de la mécanique quantique-, au moins implicitement, des complexes de chaines mettant en jeu des endomorphismes et groupes de cohomologies [BAP15] [BED20] dans l'ordre des échelles ici algébriques donnant un sens profond aux bifurcations entre états discrets. Bien que le modèle n'utilise pas ces notions, l'approche ETH ajoute néanmoins avec le principe PDP, un pilier supplémentaire à la structure de la Mécanique Quantique. Si S est un système isolé, les évènements futurs potentialisés, doivent être décrits à partir des partitions de l'unité en utilisant les projections orthogonales $\pi_\xi=\pi_\xi{}^*=\pi_\xi{}^2$ agissant sur l'espace de Hilbert H_S et localisées dans un intervalle de temps futur tel que $I_F \subseteq [t_0, \infty]$. L'analyse débouche sur *un principe de diminution des potentialités (PDP)* par actualisation progressive de celles-ci dès lors qu''une trajectoire événementielle ξ est définit par ξ : $\{ \pi_\xi |_{\xi \in \sigma}\} \subset \varepsilon_{\geq t}$ avec $t \geq t_0$, tout en répondant ainsi à une partition fondamentale par projection à reste dénombrable π_ξ, : avec $\sum_{\xi \in \sigma_\infty}(\pi_\xi)=1$). Un système isolé mais ouvert peut alors être défini à partir d'une co-filtration (à savoir une filtration décroissante) de l'algèbre des évènements futurs[21] $\{ \varepsilon_{\geq t} |_{t \in \mathbb{R}}\}$ ou bien $\{ \varepsilon_{\geq t} |_{t \in \mathbb{Z}} \}$. L'évolution temporelle définit des endomorphismes mono-paramétrés par t pour les algèbres $\varepsilon_{\geq t}$ dont l'image successorale n'est autre que l'algèbre $\varepsilon_{\geq t'}$. Le principe de diminution des potentialité (PDP) est alors lié à l'ordonnancement stricte des algèbres et à leur combinatoire [ROG64]

$\varepsilon_{\geq t'} \subset \varepsilon_{\geq t}$ quel que soit $t' > t \geq t_0$

Ce principe caractérise les systèmes isolés ouverts. Comme à l'ordinaire un état ω du système *S* est donné par la matrice densité Ω sur H_S. On a alors $\omega(A) := tr(\Omega.A)$ pour tout $A \in B(H_S)$. A ce stade il n'y a directement ni incertitude ni même expression probabiliste explicite toutefois conformément à l'interprétation de Copenhague, à savoir « *every measurement is thought to provoke a non-linear stochastic change of state* » il est naturel d'admettre qu'une potentialité est donnée par une partition de l'unité par projection orthogonal π sur H_S et que celle-ci puisse être de nature probabiliste[22]. Un état au temps t du système *S* est donné par une probabilité de mesure quantique sur le treillis des projections dans $\varepsilon_{\geq t'}$ c'est-à-dire par une fonctionnelle ω_t , qui possède une double propriété : d'une part elle assigne à toute projection $\pi \subset \varepsilon_{\geq t}$ une valeur telle que $\omega_t(\pi) \in [0,1]$ et $\omega_t(\mathbf{1}) =1$ et d'autre part $\omega_t(\pi)$ est additif $\sum_{\pi \in J} \omega(\pi)=1$ si $J \subset \varepsilon_{\geq t}$. Partant ω_t représente un état potentiel du système S(t') pour tout $t' \geq t$. soit $\omega_t := \omega|_{\varepsilon \geq t}$ soit encore $\omega_t(A) := \omega(A), \forall A \in \varepsilon_{\geq t}$. On notera que ω peut être un état pur sur ε toutefois comme $\varepsilon_{\geq t} \subset \varepsilon$, l'état est le plus souvent un état mixte sur $\varepsilon_{\geq t}$ car $\omega_t(\pi)$ est une superposition d'états non cohérents associés aux projections sur une trajectoire $\xi \in \Xi : (\pi,\xi)$, où Ξ est un ensemble dénombrable tel que $\pi_\xi \, \pi_\eta = \delta_{\xi\eta} \, \pi_\xi$ et $\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi=1$, autrement dit la mesure de probabilité déterminée sur le champ des potentialités $\mathrm{Prob}_{\varepsilon \geq t}$ est une combinaison convexe de mesures de probabilités indexées par $\xi \in X$ celle-ci caractérisant la suite des projections π de l'évènement actualisé au temps t (mélange indexé par les point de Ξ). Il y a en pratique intrication des états due à l'emboitement des

[21] Outre l'usage qui est fait de l'ordonnancement des intervalles, on commence ici à voir le rôle des filtres et des ultra filtres évoqués par P. Riot en remplacement des séries convergentes.

[22] A ce propos A. Einstein affirmait en 1935 : « je ne peux pas supporter l'idée qu'un élecron exposé à un rayonnement puisse choisir de son propre gré le moment et la direction dans laquelle il désire sauter. S'il en était ainsi je préfèrerais être plutôt savetier ou même employé dans un tripot que d'être physicien ».

algèbres. On observera que par définition $\varepsilon_{\geq t'} \subseteq \varepsilon_{\geq t} \subseteq B(H)$ si $t' > t$. C'est ainsi que les états successifs d'un système isolé sont donnés par la co-filtration des algèbres $\{\varepsilon_{\geq t} |_{\, t\in\mathbb{R}}\}$ et non plus par une suite convergente d'états. Cette observation ouvre la voie à une actualisation des évènements se produisant soit au temps t soit à un temps ultérieur, ainsi qu'à une approche projective directe des mesures et observations.

Soit un futur $\{ \pi_\xi \mid \xi \in \Xi \} \subset \varepsilon_{\geq t}$ et $t \geq t_0$, qui peut se déployer dans l'intervalle de temps $[t, \infty]$,. Si $P_{\geq t}$ est le treillis de toutes les projections et le mapping $P_{\geq t} \to [0,1]$ on peut alors définir une mesure de probabilité ayant les bonnes propriétés. On suppose que chaque mesure de probabilité élémentaire μ sur l'ensemble des potentialités au temps t est donnée par l'état ω_μ sur l'algèbre de von Neumann $\varepsilon_{\geq t}$ et tel que $\mu(\pi)= \omega_\mu(\pi)$, $\forall\, \pi \in P_{\geq t}$ (Théorème de Gleason-Maeda avec axiome de non contextualité : l'observable n'est pas découverte mais créée). On observera que l'application de ce théorème est une conjecture qui concerne un système par définition isolé. Il revient au modèle ETH de lui donner un contenu formel et un sens si possible intuitif. Le modèle ETH ajoute donc à la co-filtration liée aux coupures temporelles des algèbres, un principe de diminution des potentialités (PDP). Autrement dit l'évolution évènementielle a pour fondement de consommer des possibles en les actualisant. De façon générale attendu l'ordonnancement on aura :

$$\{ e^{isH} \pi_\xi \; e^{-isH}|_{\xi \in \epsilon} \} \in \varepsilon_{\geq (t+s)}$$

Pour les systèmes *S* caractérisés par un nombre fini de degrés de liberté, les algèbres $\varepsilon_{\geq t}$ coïncident avec l'algèbre B(Hs) pour tous les opérateurs bornés sur H_S. Il apparait donc temporellement autonome. Il en résulte qu'il devient impossible d'introduire une notion d'évènement actualisé à un temps quelconque et donc la notion de mesure ne peut pas être traitée strictement en ne considérant que le système isolé. Il n'en est pas de même si la relation d'inclusion des algèbres est stricte, faisant ainsi jouer des infinis (particules sans masses, divergences, etc) car la cardinalité de l'infini intervient alors comme des ouverts-fermés du système introduisant donc une incertitude potentielle. Par opposition un système est dit fermé si et seulement si les algèbres $\varepsilon_{\geq t}$ associées à toutes les potentialités au temps t sont indépendantes de t. De tels systèmes possèdent les mêmes défauts que les précédents ; le problème de la mesure ne peut y être résolu. Il faut alors faire intervenir un concept additionnel la notion de centre d'un état, c'est-à-dire la normalité empirique de ce même état.

4.2. *Centralisation : centre d'un état*

"*The concept of 'measurement' becomes so fuzzy on reflection that it is quite surprising to have it appearing in physical theory* ..." (John Stewart Bell). Le problème du statut de la mesure versus celui du système est en mécanique quantique une question centrale mais difficile à aborder pour plusieurs raisons : (i) le système est par définition isolé et son interaction avec l'univers dans lequel il est nécessairement plongé est faible par définition or la mesure perturbe néanmoins toujours à la fois fondamentalement et grandement le système en question; (ii) les lois relatives aux états sont par définition linéaires sinon directement au moins en moyenne (hypothèse 3 de von Neumann [NEJ38][23]) or toutes les bifurcations engendrées par la mesure ou les fluctuations physiques, sont non linéaires. La mesure appartenant au spectre des opérateurs est obtenue au terme d'une transition donc toujours mal contrôlées et mal formalisées. Comment opèrent ces bifurcations et avec quelle temporalité ? La question reste à ce jour sans réponse assurée, même en incluant l'hypothèse probabiliste car elle-même

[23] Partant des 3 hypothèses suivantes Hypothèse 1 il y a bijection entre observables R et matrices hermitiennes [R]. Hypothèse 2 Si f(R) est une observable alors la matrice [f(R)] lui correspond. Hypothèse 3 on suppose la linéarité des moyennes <aR+bS>=a<>+b<S> Von Neumann en conclut que les ensembles sans dispersion ne peuvent exister mettant un terme à l'hypothèse déterministe. Or l'hypothèse 3 se révéla non sans effort (Podolski Risen, Bohm, de Broglie etc) confrontée à des contres exemples (mesure de spin sans dispersion) s'avérant ainsi pas assez général [SEF86].

pose question ? Sur quelles bases affirmer le caractère statistique comme le suggère l'interprétation de Copenhague ? Lors de la mesure et plus généralement de toute bifurcation, les règles d'évolution de Schrödinger-Liouville ne s'appliquent plus et la transition entre états opère conformément au principe CP (Collapse Principle : réduction des états superposés) dont on observera qu'il s'agit d'un principe sans réel fondement théorique. On doit à von Neumann l'affirmation (démonstration ultérieurement infirmée) de la complétude de la mécanique quantique incluant son caractère dispersif [NEJ38].

On rappelle que le centre d'une algèbre de von Neumann A est donné par l'intersection de A avec son commutant A', soit $Z(A)=A\cap A'$. Ce centre est appelé « facteur » s'il est réduit à des homothétie soit encore à de simples changements d'échelles (produit catégorique [LET16]) . De façon générale étant donnée une C^* algèbre A et un état ω sur A on appelle centraliseur $C_\omega(A)$ de l'état ω, *la sous algèbre* de tous les opérateurs $Y\in A$, tels que $\omega([Y, X]) = 0, \forall X \in A$, c'est-à-dire $C_\omega(A) := \{Y \in A|_{\omega([Y, X]) = 0,\ \forall X \in A}\}$. On notera que l'état $\omega([Y, X])$ définit une trace finie normalisée sur son centralisateur.

Considérons un état ω_t du système à l'instant t. Un centraliseur $C_{\omega t}$ est une sous algèbre de $\varepsilon_{\geq t}$ générée par tous les événements potentiels exprimés par $\{ \pi_\xi |_{\xi\in\Xi} \} \subset \varepsilon_{\geq t}$ commutant avec ω_t. Soit encore : $\omega_t = \sum_{\xi\in\Xi} [\pi_\xi\, \omega_t\, \pi_\xi]$. Appelons $Z_{\omega t}$ la sous algèbre abélienne de $C_{\omega t}$ générée par tous les évènements potentiels $\{ \pi_\xi |_{\xi\in\Xi} \} \in C_{\omega t}$. commutant avec tous les opérateurs internes au centralisateur $C_{\omega t}$ Il en résulte immédiatement que $Z_{\omega t}$ est généré par les projections d'un évènement potentiel donné par $\{ \pi_\xi |_{\xi\in\Xi_{\Omega t}} \} \in C_{\omega t}$; *autrement dit il résume les évènements potentiels actualisant au temps t un système S dont on sait qu'il est donné par l'état* ω_t . Partant de ce constat on est alors en mesure de concevoir, sachant que le système S reste isolé, la loi de bifurcation stochastique d'un état donné. On admettra que le temps est discret $t=n\tau\in \mathbb{Z}_{\tau>0}$. Le principe de réduction des états reste non trivial mais commence à faire sens. Définissons en effet la restriction ${}^R\omega_{t+\tau}$: $\omega_t \rightarrow {}^R\omega_{t+\tau}$ comme état sur $\varepsilon_{\geq t+\tau}$ donc ${}^R\omega_{\ t+\tau} := \omega_t|\varepsilon_{\geq\ t+\tau}$ en sorte qu'on ait la *relation d'inclusion stricte* due au principe PDP : $\varepsilon_{\geq t+\tau} \subset \varepsilon_{\geq t}$. L'axiome CP [24] affirme que l'ensemble $\{ \pi_\xi |_{\xi\in\Xi,\ {}^R\omega_{t+\tau}} \}$ actualise au temps $t+\tau$ les évènements potentiels donnés par réduction des états ${}^R\omega_{t+\tau}$. On a donc maintenant

$$\sigma\ {}^R\omega_{|t+\tau} = \mathrm{spec}\ [Z\ {}^R\omega_{|\ t+\tau}\,(\varepsilon_{\geq t+\tau})]\ ;$$

Ici la restriction ${}^R\omega_{\ t+\tau\,|\varepsilon_{\geq}\ t+\tau}$ est telle que ${}^R\omega_{t+\tau}$ sur $\varepsilon_{\geq t+\tau}$ est remplacée par une projection sur un état propre du système ce que l'on peut, pour tout $\xi\in\Xi\ {}^R\omega_{\ t+\tau}$, exprimer par la relation :

$$\omega_{\ t+\tau} \equiv \omega_{\ t+\tau,\xi} := \mathrm{tr}[\ {}^R\omega_{t+\tau}\ (\pi_\xi)]^{-1}[\pi_\xi\ {}^R\omega_{t+\tau}\ \pi_\xi] \text{ pour } \mathrm{tr}[\ {}^R\omega_{t+\tau}\ (\pi_\xi)] \neq 0$$

La probabilité $\mathrm{Prob}_{t+\tau}(\xi)$ que l'état $\omega_{\ t+\tau\ ,\xi}$ soit sélectionné par la nature comme état de S au temps $t+\tau$ est alors donnée par une généralisation de la règle de Born[25]

$$\mathrm{Prob}_{t+\tau}(\xi)= \mathrm{tr}[\ {}^R\omega_{t+\tau}\ \pi_\xi]$$

[24] AxiomCP (Colapse Postulate :) formulé ci-dessus, est analogue au postulat de réduction des états (décohérence) de l'interprétation de Copenhague. Mais grâce au principe de Diminution de Potentialités (PDP), son statut dans l'approche ETH n'est pas seulement logiquement cohérent, mais parfaitement naturel (c'est-à-dire non ad hoc). Le fait que le spectre s non commutatif joue un rôle très important dans une analyse de l'évolution temporelle des états devient étonnamment clair dans la théorie quantique relativiste locale en ce sens qu'il spécifie une règle précise de bifurcation.

[25] Selon cette règle la probabilité trouver une fonction d'onde donnée est fournit par le carré de l'amplitude de cette fonction d'onde. Si la fonction d'onde du système superposé S sur le cercle unité du plan complexe est a|x>+b|y>, la probabilité de mesurer S dans l'état x est donnée par $|a|^2$.

où $\pi_\xi(t)$ exprime la projection sur la valeur propre de l'opérateur autoadjoint relatif à l'état du système. A ce stade le cas limite $dt \rightarrow 0$ n'est pas traitée. Ceci conduit à une approche ETH « intuitive » dans lequel l'Evènement, la Temporalité et l'Histoire (ETH), soit l'évolution temporelle des états quantiques, opère selon un branchement arborescent (T Tree) dont les règles d'évolution relèvent de la conjonction de l'Axiome de Colapsus CP , de l'axiome PDP et de l'axiome de partition limite et discrète (PLD) des états quantiques, axiome qui rejoint en probabilité les règles de Born.

Attendu ce qui précède l'état mixte[26] éventuellement obtenu par l'expérimentateur s'écrit

$$\omega_t(A) = \sum_{\xi \in \Xi} \omega(\pi_\xi A \pi_\xi), \forall A \in \varepsilon_{\varepsilon \geq t}$$

La projection appartient au centre de l'état réduit en sorte que $\pi(t+\tau) := \pi_\xi \in Z_{R\omega_{t+\tau}}$ est appelé évènement actuel (actuality) au temps $t+\tau$.

On définit une histoire de longueur r : $\underline{\omega}_r$ comme le chemin connecté tel que $\underline{\omega}_r := (\omega_o \ldots \omega_{r-1})$ des états sur ε avec $(\omega_j(\pi_j) \rightarrow \omega_{j+1}(\pi_{j+1}), \forall j=0\ldots r-1$. Alors il existe une projection orthogonale minimale telle que $\pi_j \in Z_{\omega_j}(\varepsilon_{\geq 1})$ en sorte que *l'opérateur « flèche » s'exprime alors par le truchement d'un opérateur $\gamma(\Xi)$ de décalage :*

$$\omega_{j+1}(\Xi) = [\omega_j(\pi_j)]^{-1} [\omega_j(\pi_j \gamma(\Xi) \pi_j), \ \forall X=\varepsilon.$$

qui n'est autre que l'analogue d'un opérateur différentiel dans un groupe de cohomologie pour un complexe de chaine. Il en résulte que l'histoire $\underline{\omega}_r$ est donnée par la paire $(\omega, \underline{\pi}_r)$, où $\omega = \omega_0$ est l'état initial du système et ou $\underline{\pi}_r$ est la séquence $(\pi_o \ldots \pi_{r-1})$. L'espace des histoires est noté $\mathcal{H}_\omega$ Partant un opérateur historique discret est donné par

$$H_{\pi_0}(\underline{\pi}_r) := \prod_{j=0\ldots r-1} \gamma^j(\pi_j) \text{ avec } r \in \mathbb{Z}_\tau$$

Dans ce cas S peut être équipé d'une mesure de probabilité

$$\text{Prob}_\omega (\underline{\pi}_r) := \omega (H^*(\underline{\pi}_r) H_{\pi_0} (\underline{\pi}_r))$$

qui avec $\pi_j \in Z_{\omega j}(\varepsilon_{\geq 1})$ conduit à écrire : $\text{Prob}_\omega (\underline{\pi}_{r-1}) = \sum_{\pi_{r-1} \in Z_{\omega r-1}(\varepsilon_{\geq 1})} \text{Prob}_\omega(\underline{\pi}_r)$

où les projections, $\pi_{r-1} \in Z_{\omega r-1} (\varepsilon \geq 1)$ relèvent d'une partition de l'unité. On voit ici jouer clairement le principe PDP. On peut alors affirmer que ce qui existe est nécessairement encodé au moyen de la séquence de paires (états + Evénements actuels)

$$\{(\omega_j, Z_{\omega j} (\varepsilon_{\geq 1}))|_{\omega_j \rightarrow \omega_{j+1}, \forall j=0\ldots r-1, r \in \mathbb{Z}\tau} \}$$

---

[26] Cette équation peut être validée en partant d'une algèbre de von Neumann M et w un état sur M. |On définit le pivot (centralizer) de l'état w par $C_w(M) := \{X \in M | w([AX])=0,), \forall A \in M \}$ qui est une sous algèbre de M et w une trace normalisée sur $C_w(M)$. Dès lors le centre $Z_w(M)$ de $C_w(M)$ est donné par la relation suivante $Z_w(M) := \{X \in C_w(M) | [AX])=0,), \forall A \in C_w(M) \}$ On peut introduire la bonne notion d'actualisation d'un évènement (le temps est discrétisé avec postulat de réduction des états). Considérons un système S isolé et $M := e_{\geq t}$ et $w := w_t$. Partant si w_t est l'état de S on appelle évènement actuel (ie au temps t) si et seulement si $Z_{\omega t} (\varepsilon_{\geq t})$ contient au moins deux projection orthogonales non nulles disjointes , $\pi^{/1}$, $\pi^{/2}$: $\pi^{/1} . \pi^{/2} = 0$ caractérisées par une probabilité de Born non évanescente, soit $0 < \omega_t (\pi^{/i}) < 1$. Par exemple : $Z_{\omega t} (\varepsilon_{\geq t})$ est généré par une partition de l'unité $P_t = \{\{ \pi_\xi \ | \xi \in € _{\omega t} \}$ de projections orthogonales dénombrables avec $\sigma^R_{\omega(t)} = \text{spect}[Z_{\omega t} (\varepsilon_{\geq t})]$.

Etablissant une relation entre ω_j, , π_j, et ω_{j+1}. On peut observer que l'état ω sur l'algèbre ε donne naissance à un évènement actuel décrit au moyen de $Z_{\omega j}$, soit l'espace des états « normaux » de ε considéré comme un groupoïde dont la flèche catégorique est donnée par la relation que l'on pourrait qualifier de cohomologique $\omega_j, \rightarrow t\ \omega_{j+1}$. et pour lequel le complexe de chaine est initialisé à ω_0. Cet état représente le tronc de l'arbre historique qui supporte l'état associé à un « temps » ω_t.

Selon cette approche les bifurcations sont associées à un arbre de décisions stochastiques (processus de Poisson) , dans lequel les règles de bifurcations sont fondées sur l'axiome CP qui suppose si le système est discret, la présence d'une flèche du temps : $\tau > 0$. Que devient cet arbre si τ tend vers zéro. Le modèle ETH s'appuie sur les données expérimentales pour valider la conservation de la signification de la notion de centralisateur. On se réfèrera à l'usage que fait Philippe. Riot des ultrafiltres [RIO24] [LMA26] pour confirmer pourquoi théoriquement, la structure duale interne de l'évènement espace-temps permet de conserver la pertinence de l'analyse ETH.

On observera que les lois d'évolutions de types Schrödinger-Liouville émergent lorsqu'on considère une moyenne sur toutes les histoires possibles.

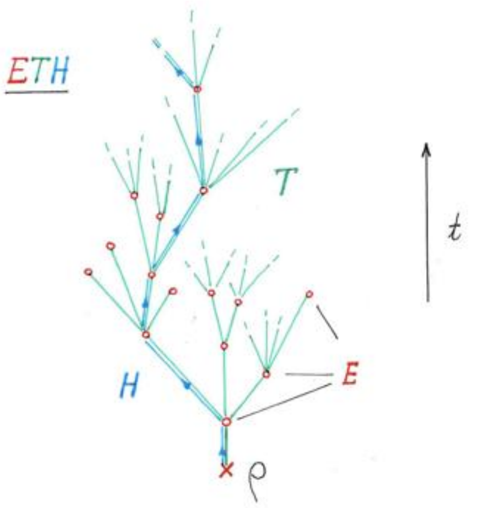

Figure 3. *Crédit J. Fröhlich communication faite à l'ENS Lyon 2022 : Arbre de probabilité relatif aux histoires possibles. Au plan quantique l'analogue de la probabilité de Werner est donné par la mesure dW := $P_{\pi 0}\{\pi(t_0+\tau)\ldots\pi(t)\}=Tr[H_{\pi 0}{}^*(t_0,t).\ H_{\pi 0}(t_0,t)]/Tr[\pi_0]$, car les traces sont invariantes par changement de base. L'évolution temporelle des histoires possibles est donnée par un processus arborescent (de type poisson) ou la loi de bifurcation est donnée par l'axiome CP. La question du passage à la limite discret/continu pour la valeur de t reste une question ouverte. Comme dans le cas classique le passage aux représentations déterministes passe par l'usage de moyenne sur l'ensemble des histoires possibles.*

Les états stables et autonomes relèvent de la diagonale le l'espace vectoriel et s'expriment donc en dimension 2. C'est à partir de cette contrainte dimensionnelle qu'il importe de comprendre la réduction de la superposition en l'inscrivant dans le temps. Pourquoi la Mécanique Quantique est-elle contrainte par le fait qu'au temps *t*, il puisse se produire une partition de l'unité en sorte que la formulation ci-dessus se trouve vérifiée. Il est évidemment totalement artificiel de considérer le rôle d'un observateur putatif (qui le plus souvent est absent de phénomènes existant hors de toute observation) Il faut trouver une autre voie et c'est précisément l'objet de la proposition attaché au modèle ETH. *Ce modèle rend pertinent la discrétisation du temps par le truchement de l'arborescence et des projecteurs.*

Comme l'affirme le Professeur J. Fröhlich dans ses communications orales, l'approche ETH et son sens physique intuitif remplace alors les salmigondis et calembredaines habituellement attachés aux explications relatives tant à la décohérence qu'à la réduction de la fonction d'onde [ZWH21] et cette analyse se fait définitivement plus pertinente si le temps est vu comme une variable discrète.

4.3. *Principe de Huygens et principe PDP :* confirmations empiriques

Le Principe de Huygens énonce que la lumière se propage en ligne droite et chaque point sur un front d'onde (on prend des ondes sphériques de formulation quadratique d=2) peut être considéré comme la source d'une onde secondaire également sphérique. Ces ondes secondaires interfèrent entre elles, en sorte que le front d'onde *à un instant futur* est la somme de toutes les ondes secondaires émanant du front d'onde à *un instant antérieur*. Autrement dit le principe considère la succession de l'antérieur du présent et du postérieur non sans grandes interrogations. On trouvera en particulier ces interrogations dans l'analyse critique qu'en a donnée J. Hadamard en 1924 dans le bulletin de la Société Mathématique de France [HAJ24]. Formellement le principe de Huygens est étendu aux ondes de probabilité de la mécanique quantique. Excepté dans le cas où la distance x-y est de type purement lumière, rejoignant alors le principe édicté, on écrit pour cerner la succession considérée, la commutation de deux quadrivecteurs $[F_{\mu\nu}(\tau,x)\ F_{\rho\sigma}(\tau,y)]=0$. Cela permet de prédire la direction et la forme de la propagation par exemple dans tout milieu où le champ est hétérogène, cas d'une propagation arborescente. Le principe s'applique en particulier pour des particules quantiques sans masse (Photon, graviton, etc)

Selon le modèle ETH le Principe de diminution de Potentialités (PDP) est un avatar du principe de Huygens. Le principe PDP énonce en effet que pour un système disposant de potentialités en nombre fini, l'actualisation de potentialités existantes à des instants antérieurs réduit naturellement les potentialités susceptibles d'être réalisées à un instant postérieur dans lequel le détail, toujours plus informé, se trouve progressivement couplé au comportement global. *Une telle affirmation conduit à concevoir le présent comme une coupure aristotélicienne entre l'antérieur et le postérieur. C'est elle que considère le centralisateur.* Il s'agit donc d'un principe reposant sur une relation d'ordre dans le sens ou l'arborescence représentative de l'ensemble des bifurcations (Figure 3) est orientée et stratifiée arithmétiquement [27].

Les présentations du modèle ETH conduisent à considérer un système S constitué d'un atome statique couplé à un champ magnétique et positionné au voisinage de l'origine de l'espace. Il s'agit de conjuguer (identifier) le principe de Huygens Fresnel et le principe de diminution de potentialité (PDP). Prenons un exemple :

L'atome dispose de M niveaux d'énergie représentés dans l'espace de Hilbert $h_A= \mathbb{C}^M$. Cet espace du champ électromagnétique est un espace de Fock $\mathfrak{F}$ pour les photons ; le champ est un champ de tenseurs électromagnétique $F_{\mu\nu}(\tau,x)$ donné empiriquement par interaction avec un élément de l'ensemble des fonctions test atomiques $\{h^{\mu\nu}\}$. L'interaction s'écrit au moyen d'un opérateur auto adjoint localisé $F(h) \in \mathfrak{F}$: $F(h)= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}3} d\tau\, dx^3\, F_{\mu\nu}(\tau,x)\ h^{\mu\nu}(\tau,x)$

L'hamiltonien usuel d'un champ électromagnétique est donné par $H_f=H_f^*> 0$ sur $\mathfrak{F}$. Dans la limite infinie pour la vitesse de la lumière $c \to\infty$, $H_f \mapsto \mathfrak{B}$, où $\mathfrak{B}$ génère la succession le long de l'axe 1D dit du temps et le $spec(\mathfrak{B})= \mathbb{R}$. Le modèle ETH s'appuie sur un Espace-Temps de Minkowski ici dit de type Diamant stratifié temporellement car reposant sur les cônes locaux de causalité relativiste. La

[27] Le principe de Huygens conduit au principe de diminution des potentialités (PDP). Fondé sur l'ordonnancement arithmétique standard il est (sauf dans le cas hypothèse de Riemann d=2) en opposition avec l'ordre associé à la fonction zêta comme (pont entre l'univers du continu et l'univers du discret [RIP17-24]) Dès lors qu'il concerne une arborescence de dimensions 2, ces deux principes font immanquablement penser, via la cohomologie [BAP15] [BED20], à l'expression de la fonction entropie attachée au remplissage s de sites en nombres finis ; soit $\mathfrak{I} \sim -\log[s/(1-s)]=-\log(\text{Actuel/Potentiel})$

modélisation conduit à écrire l'espace de Hilbert de S comme produit tensoriel $Hs = \mathfrak{F} \otimes h_A$ L'unité « joaillière » est donnée par $D_{[t,t']} := V_t^+ \cap V_{t'}^-$ (Fig 4) pour un espace centré en x=0 étendu à $c \rightarrow \infty$.

Les fonctions bornées de l'opérateur champ F(h), $supp(h^{\mu\nu}) \subseteq D_{[t,t']}$ génèrent une algèbre de von Neumann $A_{I=[t,t']}$ sur les transitions. On définit les algèbres $D_I^{(0)} := A_I \otimes \mathbf{1}|_{hA}$, $\varepsilon_I^{(0)} := A_I \otimes B(h_A)$ et

$\varepsilon^{(0)}_{\geq t} \overline{\bigvee}_{I \subset [t,\infty]} (\varepsilon_I^{(0)})$. Si I :=[t,t']

alors $\varepsilon^{(0)}_{\geq t} \cap \varepsilon^{(0)}_{\geq t'} = D_I^{(0)}$ (algèbre de dimensions infinie) le temps étant ici discrétisé et dénombrable (Fig.4)

On utilise un opérateur unitaire $U \in \varepsilon^0_{[0,1]}$ en considérant :

$\boldsymbol{U}_k = e^{i(k-1)Hf} \boldsymbol{U} e^{-i(k-1)Hf}$ k=1,2,… $\boldsymbol{U}(n) := \Pi_{k=1,n} \boldsymbol{U}_k$,

$\Gamma := e^{-iHf} \boldsymbol{U}$ en outre $\Gamma^n := e^{-inHf} \boldsymbol{U}(n)$ avec $(\Gamma^n)^* = \Gamma^{-n}$, n=1,2,…

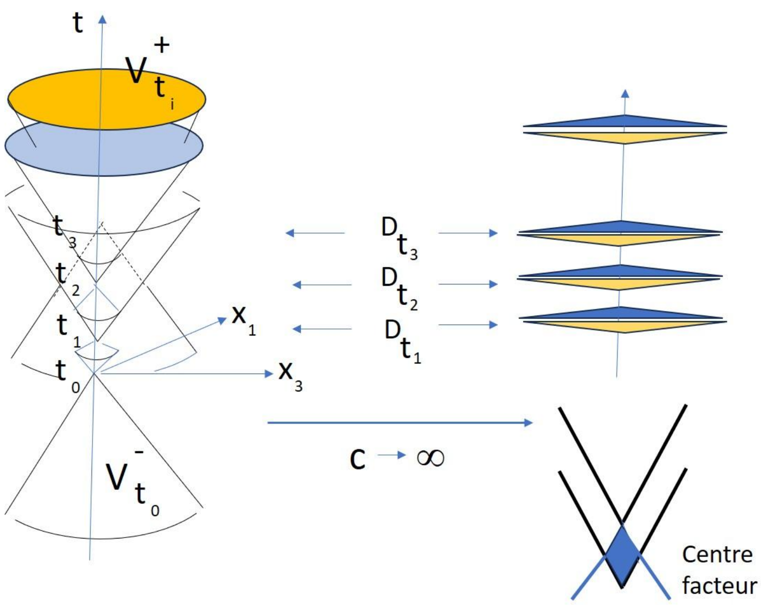

Figure 4. *Crédit J. Fröhlich communication faite à l'ENS Lyon 2022 : Structure diamant telle que représentée dans les publications et communications relatives au modèle ETH donnée par le Pr. Fröhlich . Dans la description spatio temporelle le système S est localisé dans le cône compact centré sur x:=(ct,0) ; soit V_t^+ le cône du future et $V_{t'}^-$ le cône clos sur le passé pour t'>t on définit la structure diamant comme le champ d'interaction défini par $D_{tt'} := V_t^+ \cap V_{t'}^-$. On illustre le cas où la vitesse de la lumière tend vers l'infini ains que la signification du centre (ici vu comme facteur).*

Le principe PDP pour le modèle avec interactions correspond à l'extension simple de ce qui précède et cela conduit à écrire $\Gamma^{n-n'} \varepsilon_{\geq n} \Gamma^{n'-n} = \varepsilon_{\geq n} \subset \varepsilon_{\geq n'}$ inclusion stricte pour n'>n, relation donnant un rôle central une fois de plus à l'ordonnancement. Un cas intéressant est donné par l'usage d'un état initial tel que

$\omega_0(X) := Tr_{Hs}([|0><0| \otimes \Omega]X)$ pour $x \in \varepsilon$. $|0>$ est la notation pour le champ du vide sur $\mathfrak{F}$. Ω est la matrice densité sur h_A. L'état initial ω_0 ne couple pas le système avec le champ électromagnétique le couplage opérant au long de la ligne temporelle. Puisque l'état vide $< 0|.|0 >$ n'est pas un produit d'états sur l'algèbre, on a : $\overline{\nabla}_{k\,[0,\,n]}\, D^{(0)}{}_{[k,k+1]}$, et l'évolution stochastique prédite par le modèle ETH met en exergue des effets mémoire donc le rôle de l'histoire dans l'évolution. Il s'agit d'un comportement majeur à souligner, comportement directement associé aux ordonnancements en jeu dans les algèbres. Le traitement se simplifie dans la limite ou la vitesse de la lumière c tend vers l'infini. Dans ce cas le diamant élémentaire $D_{[k,k+1]}$ et l'algèbre $D^{(0)}{}_{[k,k+1]}$ se confondent et

$$D^{(0)}{}_{[k,k+1]} \sim B(H_k) \text{ avec } H_k \sim \mathbb{C}^N \;, N \leq \infty,\ \forall\, k.$$

On rappelle ce qui précède à savoir qu'un système isolé ouvert est caractérisé par la relation d'ordre stricte $\varepsilon_{\geq t'} \subset \varepsilon_{\geq t}$ si $t' > t$, relation qui autorise l'application du principe PDP et les hypothèses quant au rôle des processus stochastique en jeu. L'approche ETH conduit au scénario suivant : l'évolution des états permettant de pointer des évènements E (par exemple l'émission spontanée d'un photon) est déterminée par un processus de bifurcations successives comme il est schématisé en figure 3, et dont les états doivent être référés au spectre non commutatif donné par l'union disjointe $\sigma_S := \mathrm{U}_\omega[\omega, \sigma_\omega(\mathfrak{N})]$ relation qui conduit à admettre que toutes les algèbres $\varepsilon_{\geq t}$ sont isomorphe de manière universelle à une algèbre de von Neumann noté $\mathfrak{N}$ (autosimilarité). Si le temps est choisi discret la définition 6.2 des évènements actuels (connus) et la règle de Born définissent complétement la probabilité attachée aux bifurcations sur les arbres. Pour appuyer sa démarche le Pr. J. Fröhlich fournit plusieurs exemples.

5. conclusions

La question soulevée par le modèle ETH est présente dans l'esprit des philosophes depuis des millénaire. On rappellera en effet que Platon contestait la position de son maitre Parmenide (*L'être est. Le non être n'est pas !*) en affirmant que sa position statique condamnait tout devenir (*il y a toujours de l'être dans le non être*). Une génération sépare les deux philosophes mais ils s'enrichissent paradoxalement mutuellement (*Du Paricide chez les philosophes* : R.P. Droit)

On mesurera le défi relevé par le Professeur Fröhlich en replaçant le modèle dans la construction des fétiches qui structurent la pensée scientifique depuis la renaissance [STI97]. En particulier on voit ici comment le scientifique intègre, dans une vision élargie, outre le fétiche global lagrangien/hamiltonien adapté à une représentation entropique donc statistique (Clausius), les processus locaux ordonnés dans le cadre topologique d'une arborescence. La représentation en diamant qui englobe la hiérarchie, affirme que le présent n'est pas néant mais quelle qu'en soit l'épaisseur, il est formé d'un avers et d'un revers. L'infiniment petit est alors informé par un infiniment complexe d'une canopée potentielle.

On ne manquera pas d'observer que le principe qui lie l'approche ETH relative aux transitions quantique / macroscopique (décohérence et réduction de la fonction d'onde) met en exergue le rôle que joue l'ordre d'inclusion des algèbres et à la limite l'autosimilarité sous-jacent à cet ordonnancement. Dès lors qu'ils peuvent être liés au mouvement brownien et à la distribution des nombres premiers, les principes qui président au statut et au rôle de la fonction zêta (comme *superposition arborescente* de copies de copies de $\mathbb{N}$, et *de pont* entre les univers Discret et Continu ainsi qu'entre des relations fonctionnelles et des foncteurs toposiques [BAB82] [KEJ00], [STJ13] [RIP17-19] [LMA26]) devraient être retrouvées sous la contrainte de l'hypothèse de Riemann, hypothèse qui recoupe l'affirmation ETH selon laquelle l'espace-temps arborescent est de dimension d=2, α=1/d . Le principe PDP impose pour sa part l'existence de bornes sur les ouverts qui n'existent pas nécessairement dans le cas général fondé sur des symétries très différentes des symétries quantiques [RIP17,19,24], [LMA26].

En remplaçant l'évolution de Schrödinger (dont la fonction zêta est une solution) par une approche arborescente, le modèle ETH de la Mécanique Quantique, fournit une formalisation intuitive du couplage local / global   cohérente et expérimentalement pertinente de l'évolution temporelle des états et des événements microscopiques. Le modèle explicite en particulier le caractère stochastique du processus local dans les systèmes isolés ouverts. La démarche suivie présentes une ressemblance avec l'approche « Many Worlds » et « GRW[28] », toutefois l'approche ETH remplace avantageusement ces formalismes car il ne décrit qu'un seul Monde, le nôtre, toutefois marqué par un contexte de grande intrication ! Les modèles et les 4 exemples donnés dans les références développées par l'équipe de *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich* illustrent la puissance heuristique du modèle ETH. Les champs décrivant les modes harmoniques pour les extensités (photons et gravitons), outre la mise en exergue de la dimensionnalité paire de l'espace-temps, jouent un rôle clé dans la genèse de la théorie en satisfaisant la condition spectrale (H,0) et en résolvant la question de la « mesure comme problème". Le principe de diminution de potentialité (PDP) permet de comprendre l'émergence éventuelle d'une flèche du temps par clôture (D(Anterieur) ≠ D(Posterieur) à une limite) dont l'origine et le statut apparaitrait ici radicalement différent du temps thermique de Connes-Rovelli en particulier parce que le « paradoxe de l'unité » disparait dans le modèle sans en revenir à une incertitude de nature strictement thermodynamique.

Il est maintenant sérieusement envisagé [PAD83] [FIF04] [KOV22] mais aussi [RIP17] et [LMA26] que la flèche du temps soit une simple conséquence de l'intrication caractéristique de toute complexité en particulier entre niveaux d'échelles distincts y compris dans le cas quantique dès lors que les photons servent d'horloge interne par exemple pour observer des particules intriquées. Le système S évolue dans une temporalité propre alors que pour un observateur extérieur S sous l'effet d'un opérateur unitaire, S apparait statique. Si tel est le cas le temps n'est plus une variable indépendante mais une conséquence des couplages internes au système lui-même. Comme dans l'approche proposée dans le projet Lîla Entropie la flèche du temps résulterait alors du couplage local /global et l'irréversibilité du temps (Antérieur/Postérieur) serait un avatar du distinguo spatial Intérieur/Extérieur distinguo formalisable par une non commutativité de la paire temps (interne) / es(ex)pace (externe) et vice versa, d'où le rôle du centraliseur des algèbres en jeu.

L'intégralité du modèle ETH élémentaire est développé en temps discret. On analysera cependant avec intérêt le développement proposé en suggérant l'usage des opérateurs création-annihilation dans le temps et dans l'espace de Fourier (avec la difficulté pour les auteurs de comprendre l'expression particulière de la transformation de Fourier proposée) ce qui reviennent à construire une structure Markovienne de chaque bifurcation sur l'arborescence. Ce sont alors les propriétés de commutation de ces opérateurs qui justifient la conjonction de la continuité du temps et de la discrétisation de l'espace que le projet Lîla Entropie résume dans certaines contributions par l'usage de la fonction zêta de Riemann. Les deux points de vue semblent pouvoir se rejoindre et le lecteur intéressé analysera sans doute avec intérêt les références de 41 à 46 donné dans la publication [FRJ22]. Quelle que soit l'intérêt de cette analyse il n'apparait pas qu'elle conduise à expliciter la question de la flèche du temps sinon d'une manière elliptique assez proche et indirecte de ce que peut être un temps thermique qui serait ici éventuellement fondé sur les fluctuations du vide.

La question de la causalité associée au modèle ETH permettant éventuellement de faire le lien avec la théorie de la gravitation reste une question ouverte que pose par exemple la référence [FIF04] en considérant les analogies entre la théorie du Fermion Causal System (FCS) décrivant le vide de Minkowski et le modèle ETH. S'il s'avère qu'il existe des similitudes il existe aussi des différences qui ne permettent pas d'assurer du caractère causal de l'approche ETH.

Au-delà de ce travail spécifique le Professeur Fröhlich pose de manière plus générale la question du lien entre l'irréversibilité et la flèche du temps y compris dans le domaine quantique. Il écrit en substance : *Dans le cadre du formalisme général de la théorie quantique, l'irréversibilité et la flèche du temps dans l'évolution de divers systèmes physiques* exigent d'être *étudiées*. *Le comportement*

[28] Ghirardi Rimini Weber (GRW) spontaneous collapse theory

irréversible se manifeste souvent sous la forme d'une « production d'entropie ». Ceci (.) amène à examiner en détail *la notion de l'entropie quantique, un sujet auquel Elliott Lieb a apporté des contributions remarquables, suivi d'une énumération d'exemples de comportement irréversible et de flèche du temps* (.) Après avoir analysé les conséquences thermodynamiques de la statistique quantique il est intéressant de passer *en revue les résultats concernant le mouvement diffusif (brownien) d'une particule quantique interagissant avec un bain thermique quantique quasi libre. S'ensuit une esquisse de la théorie du frottement par émission de rayonnement Tcherenkov d'ondes sonores dans un système constitué d'une particule se déplaçant dans un condensat de Bose-Einstein et interagissant avec celui-ci. Il est alors possible d'aborder la question de la flèche du temps fondamentale inhérente* à la structure *de la mécanique quantique [FRJ22].* Ce commentaire suggère que le modèle ETH reste une introduction à une problématique encore largement ouverte à des recherches dont il est encore difficile de fixer l'orientation et le terme.

Remerciements :

Les auteurs remercient Sumiyoshi Abe de l'Université de Mie, pour ses remarques et ses conseils avisés à propos de l'irréversibilité en Mécanique quantique (MQ). Ils remercient l'équipe de Materials Design spécialiste de Conception Assistée en MQ et tout particulièrement le Dr. Erich Wimmer pour son appui scientifique.

Bibliographie

[BAB82] Bagchi B., *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*. Math. Z. **181** (1982), 319–334. |

[BLA24] Labatut B., Maniac Ed. Grasset 2024

[BAP15] Baudot P. and Bennequin, D., ,The homological nature of entropy (2015) Entropy 17, 3253-3318

[BED20] Bennequin D. and Vignaux P., A functional equation related to generalized entropy and modular group, arXiv:1910.06927v2 [MathCA] 4 mars 2020

[COA94] Connes A. and Rovelli C., Von Neumann algebra automorphisms and time-thermodynamics relation in general covariant quantum theories, ArXiv:gr-qc/940101 14 juin 1994.

[COA17] Connes A., Chéreau D. et Dixmier J., (2018) Le spectre d'Atacama Eds. Odile Jacob, Paris

[EKN05] Benaïm M et El Karoui N.. (2005) Promenade aléatoire : chaînes de Markov et simulations ; martingales et stratégies , Paris, Eds.. École polytechnique

[EVH57] Everett Hugh, The many worlds interpretation of quantum mechanics (1957) www.pbs.org/wgbh/nova/manyworlds/pdf/dissertation.pdf

[FAJ16]. Faupin, J., Fröhlich, J., Schubnel, B.: On the probabilistic nature of quantum mechanics and the notion of closed systems. Ann. H. Poincaré **17**, 689–731 (2016). arXiv:1407.2965 (see also: Chr. Schilling, Msc. thesis, 2009, Johannes-Gutenberg University, Mainz, and ETH Zurich, unpublished)

[FIF04] Finster, F., Fröhlich, J., Oppio, M., Paganini, C.F.: Causal Fermion Systems and the ET H-Approach to Quantum Theory. arXiv:2004.11785 [math-ph] 24 apr 2020

[FRJ15] Fröhlich, J., Schubnel, B.: Quantum probability theory and the foundations of quantum mechanics. In: Blanchard, Ph., Fröhlich, J. (eds.) The Message of Quantum Science. Springer, Berlin (2015) . arXiv:1310.1484]

[FRJ20] Fröhlich, J., A brief review of the "ETH-approach to quantum mechanics". In: Anantharaman, N., Nikeghbali, A., Rassias, M. (eds.) Frontiers in Analysis and Probability. Springer, Cham (2020). arXiv:1905.06603

[FRJ22] Fröhlich, J., and Pizzo A., The time évolution of states in quantum machanics according to ETH approach, (2022) Comm. Math. Phys1673-1715

[FRJ22a] Fröhlich, J., arXiv: 2202.04619 v1 [quant-ph] Feb. 9, 2022.

[HAJ24] Hadamard J., Le principe de Huygens, (1924) Bulletin de la SMF 52, 610-640

[JOE96] Joos E., Zeh H.D., Kiefer C., Giulini D., Kupsch K.and Stamatescu I.O., *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer-Verlag, 1996. Deuxième édition : 2003. (ISBN 3-540-00390-8)

[KEJ00] Keating J.P., Snaith N.C., Random matrix theory, Commun. Math. Phys., (2000), **214**, 57–89

[KIC61] Kittel C., (1961) Eléments de physique statistique Eds. Dunod Paris

[KOV22a] Kornyak V. V., Subsystems of a Closed Quantum System in Finite Quantum Mechanics, Journal of Mathematical Sciences 261 5, 717-725 .

[KOV22b] Kornyak V. V., Decomposition of a Finite Quantum System into Subsystems: Symbolic–Numerical Approach, Programming and Computer Software(2022) 48 4, 293-312 .

[LAW97] Lawvere W. and Schanuel S., (1997) Conceptual mathematics : a first introduction to categories Cambridge University Press Cambridge.

[LAW12] Lawvere W., Categories of space and quantity , the space of mathematics, (2012) in The space of mathematics Eds Javier Echeveria, Andoni Ibassa, Thomas Marmam, de Gruyter 14-30

[LET16] Leinster Tom, Basic category theory, arXiv 1612.09375 [math CT] 30/12/2016

[LMA26] le Méhauté A., Illustration dynamique du programme de Langlands : De la fonction zêta de Riemann comme ombilic de la dynamique des systèmes complexes autosimilaires. Titre temporaire Entropie Volume 4 du projet Lîla-Entropie 2026 (à paraitre).

[NEJ38] Von Neumann J., in Proceeding of 1938 Warsaw international conference on new theories in physics, (1939) Publication de l'Institut de coopérations internationales Paris.

[OMR 06] Omnes R, Les Indispensables de la mécanique quantique (2006) Eds. Odile Jacob et notes personnelles (notes de cours de l'auteur Centre de Recherche de la CGE à Marcoussis (1985-1990))

[PAD83] Page D. N. and Wootters W. K., Evolution without evolution: Dynamics described by stationary observables Phys. Rev. D (1983) 27, 2885, and 10.1103/PhysRevD.27.2885. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.27.2885

[RED94] Revuz D. and Marc Y., (1994) Continuous martingales and Brownian motion, Springer-Verlag.

[RIP17a] Riot P. et le Méhauté A., From The arrow of time in Baliali's quantum approach to the dynamic meaning of Riemann Hypothesis (2017) Condenced matter physics 20-3 33001 p1-13

[RIP17b] Riot P. et le Méhauté A., Autosimilarité Fonction zêta et conjecture de Riemann Revue REE Vol 1, Paris 2017

[RIP19] Riot P le Méhauté A., Tayurskii D., Fractional Dynamics, Riemann Zeta Function and Self Similarity through Category Theory, in Advances in Special Functions and Analysis of Differential Equations (Chapter 14) Agarwal Praveen, Agarwal Ravi P., Ruzhansky M. Editors. CRC Press Deleware, 2019

[ROG64] Rota G. C. Foundations of combinatorial theory I Z. Wahrscheinlichkeit theo. Verwandte Geb. Z. (1964) page 340-368

[SEF84] Selleri F., le grand débat de la théorie quantique, (1984) Champ Flammarion (Paris)

[SHR97] Haroche S., Raimond J.-M. et Brune M; Le chat de Schrödinger se prête à l'expérience - Voir en direct le passage du monde quantique au monde classique, La Recherche 301 (Septembre 1997)

[STI97] Stengers , Cosmopolitiques, (2003) Edition de la découverte. Paris [on fera en particulier le lien avec les chapitre II.4 : l'évènement lagrangien (p.113) ; avec le chapitre III,3 : *l'énergie se conserve* (p.184) et le chapitre III,4 *le peu profond mystère de l'entropie* (p.196)]

[STJ13] Steuding J., *Ergodic Universaly theorems for Riemann Zeta function and other L functions*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux 25 (2013) 2, 471-476.

[WIE67] Wigner, E.P.: Remarks on the mind-body question. In: Symmetries and Reflections. (1967). Collected works Indiana University Press Indiana pp. 171–184

[WOM19] Woods M. (ETH) The page-Wootters mechanism 36 years on: a consistent formulation which account for interacting systems , (2019) Quantum views (3) 16

[ZEH70] Zeh H.Dieter *On the interpretation of measurement in quantum theory* , *Foundations of Physics*, vol. 1, nº 1, 1970, p. 69-76

[ZUW91] Zureck W.H., Décoherence and the transition from quantum to classical, Physics Today Oct 91, 36-45.

[ZUW05] Zureck W.H.,; Decoherence and the Transition from Quantum to Classical-Revisited, Séminaire Poincaré (Paris - 19 novembre 2005). Texte complet disponible aux formats PostScript et pdf *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical Revisited* [archive].

[ZWH21] Zwirn H et Connes A. Controverse à propos de ka décohérence et réduction de la fonction d'onde (2023) IHES Bures sur Yvette www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=Hervé+Zwirn+et+Alain+Connes&mid=EF0CE01413799D910281EF0CE01413799D910281&FORM=VIRE.