

Propos sur la Double Dualité Anti-Temps et Anti-Espace

About a bi-duality: Anti Time and Anti-Space

Igor Nikolai Taganov¹, Yuri Babenko²

¹ ex Vice Director du State Technology Institute de l'Académie des Sciences de Russie (1935-2021)

² Retraité de Institut of Applied Chemistry, Académie des Sciences de Russie, babenkoyui@yandex.ru

RÉSUMÉ. Replacé dans le contexte épistémologique du projet Lila Entropie, la présente communication rapporte et synthétise les recherches publiées en Russe et en Anglais par les auteurs cherchant à étendre la notion d'espace-temps: temps complexe d'une part et espace de dimension non positive d'autre part. Il ressort de ces études que de nombreuses propriétés qui peuvent paraître paradoxales dans les modèles standard de la physique (irréversibilité du temps, principe d'incertitude, intrication, expansion de l'univers émergence du vivant) apparaissent alors comme des conséquences possibles d'un ordre mathématique étendu à ces nouvelles dimensions. Le lien entre ces approches et celles des autres contributeurs (thermiciens, thermodynamiciens, etc) devraient ouvrir des perspectives nouvelles en matière de physique des systèmes complexes. Pour plus d'informations on lira avec intérêt l'ouvrage des auteurs publié sous le titre *Anti Time and Anti Space* par l'académie des sciences de Russie en 2016.

ABSTRACT. Placed in the epistemological context of the Lila Entropie project, the present communication reports and synthesizes the research published in Russian and in English by the authors seeking to enlarge the concept of space-time in fields of extended dimensions: complex time on the one hand and non-positive dimensional spaces on the other hand. It emerges from these studies that numerous properties which may appear paradoxical in standard models of physics (irreversibility of time, uncertainty principle, entanglement, expansion of the universe, emergence of living things) then appear as possible consequences of a mathematical order widen into these new dimensions. The link between these approaches and those of other contributors to lila Entropy project should open up new insights with regard to the physics of complex systems. For additional informations, you can read the work of the same authors published under the title *Anti Time and Anti Space* by the Russian Academy of Sciences in 2016.

MOTS-CLÉS. Temps Irréversible, Espace Temps. Dimensions, Séries Divergentes, Cosmologie, Physique Quantique, Incertitude.

KEYWORDS. Time, Space-time, Space Dimensions, Divergente Séries, Cosmology, Quantum Physics, Uncertainty Relations.

1. Introduction

La représentation que l'humain se donne du monde dépend toujours de l'histoire dont il est le héros. Le récit qu'il donne de lui dépend de catégories métaphysiques mouvantes selon la civilisation qui forge ses valeurs. Ainsi en est-il de l'espace et du temps mais aussi de la substance, du mouvement et de la causalité. En dépit, ou plutôt à cause de la multiplicité de nos universalismes, les méthodologies scientifiques n'échappent pas à la subjectivité. Tout discours rationnel possède son style. La logique elle-même est fille de la topologie. Pour cette raison les civilisations sont mortelles et le langage quelquefois frivole. Néanmoins, les mathématiques la philosophie et la poésie en transcendent la finitude en fondant une ontologie. Le cœur de celle-ci tient à une dualité dont l'origine est probablement à chercher dans un *distinguo* irréductible entre intériorité et extériorité, l'être des choses et leurs alter ego. Comme en arithmétique toute chose au monde est ainsi d'abord la conjonction du pair et de l'impair, ce qui revient à dire le même, donc le différent, soit encore, le simple et le complexe, le discret et le continu, le zéro et l'infini, l'intensif et l'extensif, le rationnel et l'irrationnel, l'allant et l'anti. Nous nous proposons de montrer ici comment, de façon cohérente au regard des modèles déjà connus (soit ici en cosmologie ceux de Newton et de Poincaré-Minkowski par exemple),

cette dualité étendue au concept de temps (puis à l'espace), donne un corps nouveau aux symétries du modèle standard (*PS voir bas de page concernant l'anti matière*).

2. Dualité de la Temporalité : Temps et Anti Temps

2.1. Un chemin pour une pensée active

La forme la plus paradoxale des découvertes dues à l'élaboration de la mécanique quantique est celle de l'anti-matière, concept dû à la rigueur formelle du savant Paul Dirac, devenu expérimentalement accessible dès les années 90. A la même époque, dans le domaine « macro », la puissance des ordinateurs augmentant, il devient possible d'étudier en détail, la distribution de la matière cosmique, sur des distances dépassant les 300MPc. Très loin d'être homogène comme nous le supposions, la matière cosmique forme des amas hétérogènes ou organisés (Nid d'abeilles, Filaments, clusters, etc) à grandes échelles. Observons qu'en termes dynamiques, le décalage vers le rouge des raies spectrales d'émissions lointaines, avait laissé supposer une expansion de l'univers. Certes ce décalage pouvait être pensé comme un effet cinématique mais il pouvait aussi relever d'un effet de métriques singulières de l'espace-temps dans le domaine des échelles cosmiques. Beaucoup de réflexions théoriques où expérimentale (voir les travaux de Curie) ont progressivement conduit à penser la dualité comme un possible principe universel susceptible de concerner, au-delà de la matière, l'espace et le temps, deux aprioris kantien. Ce point de vue en pratique de nature vectoriel, doit évidemment conduire à repenser le statut mathématique des concepts les plus fondamentaux (Masse, Gravitation, Vitesse, Energie, Action, etc). En particulier, la masse ayant un statut discret, la question de la discrétisation du temps et de l'espace se pose aussi avec toutes les conséquences que l'on peut encore ignorer d'un bouleversement contraire à nos intuitions et à nos usages en physique.

Des travaux déjà anciens démontrent que la prise en compte de telles précautions conduit à une nouvelle conception du temps physique (et de l'espace) très éloigné du temps absolu réel newtonien et du temps imaginaire des modèles cosmologiques de type Poincaré Minkowski. Un temps dont la caractéristique principale tient à une dualité intrinsèque. Cette dualité peut être exprimée au moyen d'une variable complexe dont les deux précédentes approches constituent les limites. Le temps complexe prendra ici le nom de « temps spirale ». En pratique, la démarche qui nous y conduit s'inscrit dans un mouvement philosophique que l'on doit faire remonter à l'aube de nos civilisations.

Une histoire :

Comme le rapporte Platon (428/7,348/7) la découverte (alogos) du nombre irrationnel ($\sqrt{2}$) 500AC, a impressionné la communauté des philosophes et fait douter de la pertinence du raisonnement algébrique naissant. Voilà sans doute pourquoi l'ingénierie originelle s'appuya principalement et jusqu'au XVIIème siècle sur la géométrie. Celle-ci reposait initialement sur les propositions d'Eudoxe de Cnide prônant l'usage de grandeurs homogénéisées extension de simples ratios et répondant à des axiomes de séparation et de conjonction (création multiple, déclinaison) connue sous le nom de lemme de continuité d'Archimède. Cette démarche permit de construire une logique quantitative y compris sur la base de grandeurs irrationnelles évidemment géométrisées. Les éléments d'Euclide (III siècle AC) se sont inscrits dans cette approche avant d'être traduit en arabe au IXème siècle puis transmis en Europe au XIIème siècle. La première traduction en latin date de 1482. Pour autant, les méthodes d'exhaustion (finite difference integration) trop ésotériques aux yeux des clercs ne furent transmises qu'oralement. Les experts du calcul continuèrent à appliquer les méthodes d'Eudoxe, à savoir *l'alternando* ($(a/b=c/d) \Rightarrow (a/c=b/d)$) *invertando* ($(a/b=c/d) \Rightarrow (b/a=d/c)$) *componendo* ($(a/b=c/d) \Rightarrow ((a+b)/b=(c+d)/c)$) comme on le voit dans les traités de J. Wallis (1616-1703) ou dans les traités de Galilée qui emploie le terme de « double ratio » pour exprimer les fréquences de ses pendules. Cette vision est limitée par le fait que les concepts de multiplication et de division n'existent pas dans les Eléments d'Euclide, puisque ce dernier utilise exclusivement des ratios, dont Newton se servira dans les « *Principia* ».

Les préventions à l'égard des nombres dues à l'existence de nombres irrationnels se prolongea donc jusqu'au XIV^{ème} siècle étape marquée par l'intervention des philosophes du Merton Collège d'Oxford bientôt surnommés les calculateurs d'Oxford parmi lesquels Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead et John Dumbleton, et leurs étudiants. Ils comprirent que le mouvement devait être saisi à l'aide de nombres en particulier en observant qu'un mobile se déplaçant à vitesse constante parcourait, dans un temps donné, la même distance qu'un mobile accéléré, à la condition que sa vitesse finale fut moitié de celle du mobile accéléré (thèse de la vitesse moyenne). Les idées de l'école des calculateurs furent reprises par leurs contemporains continentaux en particulier par l'archevêque de Lisieux conseiller de Charles V de France, Nicolas Oresme (1320/5, 1382), par ailleurs enseignant à la Sorbonne. Ce dernier dans son *Tractatus de configurationibus Qualitum et Natuum* distingue en particulier les « *extensio* » (par exemple la longueur d'une barre chauffée) et les « *intensio* » (par exemple le degré de chaleur en chaque point de la barre). Ces termes étant remplaçables par *longitudio* et *lattitudio*, Oresme non seulement anticipe les notions de coordonnées rectangulaires ce qui lui permet de donner l'équation d'une droite bien avant l'invention des coordonnées cartésiennes. Ce faisant il pense déjà implicitement au moins, le temps, la vitesse, la relativité du mouvement, en concevant des expériences de pensées plus tard exploitées par Galilée, Descartes Newton et Leibniz. En particulier en concevant le temps comme un élément de droite et en pointant explicitement la notion d'irréversibilité pour illustrer la cinématique du mouvement, Oresme introduit le premier pas qui fait perdre au temps son statut ontologique tout en distinguant le temps de l'espace qui peut en être sa représentation. Il s'agit d'une rupture radicale au regard de la philosophie grecque, selon laquelle le temps est mouvement (Aristote) mais aussi selon laquelle le maintenant est le quantum de temps irréductible. Oresme ouvre là la voie à une représentation du temps comme segment de droite dont ses successeurs feront grand usage en particulier en l'associant à l'espace. Au cœur de cette démarche apparaît la notion de fluxion, c'est-à-dire de vitesse.

Cette notion est totalement inconnue de la philosophie grecque qui considère que le maintenant exige une discrétisation du temps (Aristote) alors même que sa fonction d'intermédiation entre le passé et le futur lie naturellement le temps à l'irréversibilité du mouvement. Cette vision antique s'oppose par anticipation à la conception d'un temps réversible au même titre que l'espace, réversibilité qui reste au cœur des questionnements physiques les plus actuels. Cette géométrisation du temps a été couronné au XX^{ème} siècle par l'observation de l'invariance de la vitesse « *c* » de la lumière. La relation $L=ct$ fut suivi par l'usage relativiste de la forme quadratique d'espace-temps : $ds^2=c^2dt^2-dl^2$. L'observation de la dilatation de temps ne change rien à l'approche géométrique car cette approche reste linéaire. Ainsi non seulement la réversibilité du temps est inscrite dans le marbre quadratique mais encore, il peut toujours être inversé puisqu'il est déterminé par des conditions locales infiniment définies. On notera, premier coup de canif dans l'approche introduite par Oresme, que la forme quadratique est exigée dans l'asymétrie distinguant les signatures du temps et de l'espace

Causalité. Discrétisation du temps. Entropie et Information

La question de divisibilité infinie du temps ramène la réflexion philosophique plusieurs siècle en arrière a propos du paradoxe de Zénon d'Elée (490-430) par ailleurs disciple de Parménide. Aristote compris, sans doute le premier, que le meilleur moyen de résoudre le paradoxe était de considérer la continuité du mouvement. Toutefois, la persistance de la question soulevée et ses subtilités au travers de l'histoire des idées prouvent s'il en était besoin que la satisfaction ne pouvait être que temporaire (voir A.N. Vyaltsev). On doit à Démocrite (460-370) et à Epicure (342/1-271/2) la popularisation de la notion de discrétisation de l'espace-temps qui conduit aux paradoxes attachées au concept « *isotachs* » (tacox : vitesse). Ce terme est rencontré une première fois dans le traité de *Sextus Empiricus* au II^{ème} siècle avant d'être repris par le néoplatonisme de simplicius de sicile (490-560) observant que si tel n'était pas le cas la divisibilité infinie serait actée implicitement au moins. Il existe donc un atome de vitesse (vélocité) et le mouvement est indivisible, d'où le concept de « *kikinemy* » affirmant que le mouvement n'existe pas, seul existe son résultat (Alexandre d'Aphrodisias). Les questions touchant aux « *isotachs* » interrogèrent la philosophie médiévale, ainsi trouve-t-on dans le guide des égarés, de

Maimonide (1135-1204) que l'idée de lenteur et de célérité ne se distinguent que par des temps de repos distincts dans le processus « isotach », idée reprise par le français Nicolas d'Autrecourt, disciple de Guillaume d'Occam, qui vit ses ouvrages brûlés sur ordre du Pape Clément 6, les notions de rénovation (apparition/disparition) étant indissociables des caractéristiques de Kikinemy. Dans la même optique, les théologiens arabes du Mutakallims (Vasyl Biu-Ata, Jahiz, Muammar Biu-Abbad) développèrent la doctrine selon laquelle l'univers n'a pas d'existence éternelle.

On doit à Grégory Breit, puis à Vladimir Fock et Dmitrii Ivanenko, peu après la mise au jour des matrices de Dirac ($\alpha_k = \pm I$) l'idée que la seule valeur propre possible de l'opérateur vitesse ne pouvait être que la vitesse de la lumière, retrouvant ainsi indirectement la notion « d'Isotach ». En 1929, Guido Beck écrit alors toute vitesse sous la forme discrétisée en utilisant le seul ensemble des nombres naturels $v = l/nDt$. « n » apparaît alors comme une période du mouvement, idée qui fut suivie par Schrodinger conduisant à imposer la vitesse de la lumière à l'électron. Selon ce modèle « x » la coordonnée de ce dernier, peut être écrit avec une formule de type $x = \langle x \rangle + \delta x$ utilisant une valeur moyenne et une fluctuation (sa gigue) dépendant de la vitesse. Cette fluctuation tend vers zéro au voisinage de la vitesse de la lumière alors que pour des vitesses faibles elle peut être estimée : $\delta x_{max} = h/2m_e c$ ($\sim 10^{-11}$ cm). Ainsi la notion de vitesse peut-elle être interprétée comme une incertitude irréductible portant in fine sur le temps.

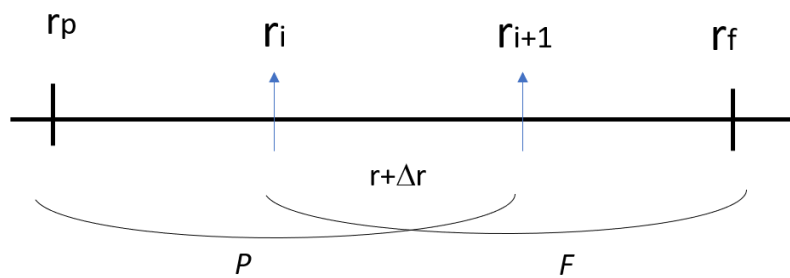
Ernst Mach était convaincu que l'espace et le temps devait être discrétisés pour penser la physique. Il se désolait de l'usage immodéré des formes différentielles. De même Wolfgang Pauli qui avançait que l'effet Compton limitait fondamentalement la précision de toute mesure. Toutefois c'est Planck qui opéra le pas décisif en postulant que l'action devait être quantifiée $\Delta E \cdot \Delta t \leq h/2$, afin d'éviter les divergences dans l'énergie du corps noir. Ce choix était d'autant plus radical qu'il ne s'agissait plus d'une simple incertitude de mesure mais d'une propriété intrinsèque d'une physique, devenant quantique. Cette conclusion peut paraître aujourd'hui d'autant plus radicale qu'au milieu du XXème siècle c'est la théorie de l'information qui démontra l'incompatibilité entre la notion d'information (au sens entropique) et la notion de continuité de l'espace-temps (Léon Brillouin, Hartmuth Henning). Le peu d'impact de ces observations tient au fait que pour l'essentiel la causalité est toujours considérée comme locale à l'exclusion de tout autre type de causalité : globale, minorante, récursive, téléologique, ... mais aussi probabiliste (Suppes, Kolmogorov) ou Informationnelle [TAG05]. L'avantage d'utiliser des modèles informationnels comme modèles de relations causales pour traiter de temps discret, et d'interpréter ce temps comme l'expression d'une ligne de transmission causal vers un effet. Cette interprétation permet d'utiliser pour le temps des théorèmes de la théorie de l'information. Ainsi pour tout ensemble statistique $\{x_{im}\}$, $\{x_{jk}\}$ associé respectivement à X_i et X_j en relation causale les fonctionnelles d'entropie, $H(X_i)$ et $H(X_j)$ et l'information $I(X_i, X_j)$ ne sont pas nécessairement celles de Shannon et de Kotelnikov. Néanmoins on peut toujours affirmer que l'inégalité $0 < I \leq \min[H(X_i), H(X_j)]$ est toujours vraie si X_i est la cause de X_j soit encore : (i) la quantité d'information qui peut être considérée dans la conséquence X_j d'une cause X_i ne peut être supérieure à l'entropie contenue dans la conséquence. Par ailleurs (ii) inversement, la quantité d'information qui peut être transmise à une conséquence par l'effet d'une cause ne peut être supérieure à l'entropie de la cause. Ainsi le modèle informationnel des relations causales correspond à l'inégalité $0 < I(X_i - X_j) \leq H(X_i)$ soit encore sous forme d'égalité $I(X_i - X_j) = \Gamma_{ij} \cdot H(X_i)$ avec $\Gamma_{ij} \in [0, 1]$, soit encore $I(X_i, X_j) / H(X_j) = \Gamma_{ij} \cdot H(X_i) / H(X_j)$. Ainsi le ratio de l'information causal à l'entropie de l'effet d'une action est proportionnel au rapport des entropies cause sur effet. Le facteur Γ_{ij} est donc une mesure quantitative de la relation causale. Ce facteur établit une gradation entre un déterminisme pur et une absence de relation causale. La relation démontre que pour une même incertitude sur l'effet, l'information fournit par la cause est au moins aussi grande que l'incertitude qui pèse sur la cause. Or toutes ces incertitudes proviennent des problématiques temporelles. En effet, selon les théorèmes de Shannon précisés par Khintchine, (i) « si la vitesse de création d'information DI/Dt , à l'entrée d'une ligne de transmission de facteur K est plus petite que cette valeur il existe un code dont la probabilité d'erreur au récepteur pourra être arbitrairement petite » et inversement (ii) « si la valeur de la vitesse est plus grande il y aura perte d'information $[(DI/Dt) - K]$ et il ne peut exister de code capable de fournir cette information ».

Ainsi, s'il existe une connexion causale entre deux événements on peut affirmer qu'il existe un intervalle de temps minimal permettant seul la transmission de la causalité sans erreur : $Dt > t_0 = DI/k > 0$. Ce temps caractéristique peut être assimilé à un quantum de temps causal, qui associé à la vitesse de la lumière assure que $\Delta s = c\Delta\tau \geq c\tau_0 > 0$, donc en pratique l'espace-temps devient cellulaire afin d'assurer la transmission sans erreur de la relation causale.

2.2. Théorèmes et équations temporelles

A ce jour l'idée d'un espace-temps cellulaire n'a conduit à aucune avancée conceptuelle significative en physique. Deux raisons expliquent cet échec apparent : (i) d'une part il existe une proximité cognitive entre les outils de la Mécanique Quantique et ceux qui résulteraient de l'usage d'un espace-temps cellulaire et (ii) toutes les tentatives visant à comprendre les concepts qui se cachent derrière les espace-temps cellulaires conduisent à prendre en compte un espace dual présentant toutes les propriétés de la continuité. A ce stade de tels espace-temps ne font jouer aucun rôle à l'irréversibilité, alors même que le temps de la mécanique quantique est intrinsèquement in temps continu et réversible conformément aux principes de Noether. Ainsi la seule rupture conceptuelle radicale concevable devrait impérativement prendre en compte l'irréversibilité du facteur temps en jouant de la dualité « discret/continu ». L'idée est alors de considérer ce facteur non, comme il est fait d'habitude sur \mathbb{R} (ensemble des nombres réels) mais sur \mathbb{C} (ensemble des nombres complexes). En effet cet ensemble permet de développer une arithmétique. Ce plongement pourra donner une pertinence nouvelle à l'ambiguïté de causalité en utilisant les zéros et les pôles comme des états discrets plongés dans un monde pouvant être éventuellement pensé continument par le truchement de fonctions analytiques.

Le plus simple est alors de partir du constat expérimental selon lequel toute mesure contient des erreurs au moins statistiques. Par exemple seuls des intervalles temporels seront considérés $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ pour des positions spatiales $[r_i, r_{i+1}]$. En plaçant le raisonnement dans le cadre de la théorie des ensembles et celle de la mesure, l'intervalle $[r_p, r_f]$ peut être divisé par le truchement d'un état « r » selon deux sous-ensembles $P(r_p, r)$ et $F(r, r_f)$ en sorte que $[r_i, r_{i+1}] = P \cap F$ avec plus précisément $r \in [r_i, r_{i+1}]$, et aussi $r + \Delta r \subset [r_i, r_{i+1}]$ soit encore le schéma :



Cette structure ensembliste étant construite on peut alors considérer une mesure additive particulière faisant intervenir un temps physique « τ » associé aux ensembles, soit encore

$$(2.12) \quad \tau_{PUF} = \tau_P + \tau_F - \tau_{P \cap F}$$

Afin de linéariser l'équation 2.12, il suffit de considérer que toute mesure ensembliste est un nombre et qu'à ce titre il peut être exprimé par le produit de deux termes soit $\tau = x \cdot y$ alors que la volonté de linéariser conduit à écrire $x_{P \cap F} = x_P + x_F$ et $y_{P \cap F} = y_P + y_F$ soit encore du fait de la multiplication et sans entrer dans le détail des calculs

$$(2.15) \quad \tau_{PUF} = \tau_P + \tau_F - (x_P y_F + x_F y_P)$$

Ainsi $\tau_{P \cap F} = (x_{PYF} + x_{FYP})$ et c'est ici que la séparabilité de P et F est mise en question car $\tau_{PUF} = 0$ entraîne $P \cap F = \emptyset$ soit encore $x_P/x_F = -y_P/y_F = z$ soit encore $\tau_P = z^2 \cdot \tau_F$. Comme toute mesure additive est nécessairement un nombre réel, il s'en suit l'introduction des nombres et donc

$$(2.18) \quad z = i(\tau_P/\tau_F)^{1/2}$$

C'est ainsi que la création d'un modèle de temps physique dans le cadre ensembliste utilisant une mesure additive rendant compte d'un processus physique soumis à des incertitudes conduit naturellement à devoir prendre en compte le corps des complexes. Dans ce cadre supposons que les variables x et y soient des variables conjuguées soit, $\tau = x \cdot x^*$ alors

$$(2.20) \quad \exp(2i\pi\phi_P) = -\exp(2i\pi\phi_F)$$

Cette relation explicite une discrétisation de la différence de phase soit $(\phi_P - \phi_F) = [\pi(n+1)/2]$ avec $n \in \mathbb{N}$ ensemble des entiers. Il est donc possible d'affirmer que la création d'un modèle de temps physique irréversible vu comme mesure additive sur un ensemble d'états d'un processus physique soumis à une incertitude conduit naturellement à (i) l'usage d'une dualité comme objet physique conduisant toute représentation à un plongement de la dynamique dans le corps des nombres complexes, contrainte qui (ii) conduit à une discrétisation du temps physique en opposition avec l'usage habituel d'un temps unidimensionnel et continue dans \mathbb{R} . (*Le lecteur pourra faire le lien avec la notion de groupoïde, d'algèbre de von Neumann et géométrie non commutative en examinant les articles du projet Lila-Entropie*). Au-delà de l'irréversibilité du temps physique « τ » il convient de faire le lien avec le temps continu des horloges, ou temps Newtonien. Cette contrainte expérimentale conduit à écrire

$$(2.22) \quad d\tau/dt + \text{div}(V_\tau \cdot \tau) = 0$$

où V_τ est l'extension de temps physique τ (pace of time) et le facteur $(V_\tau \cdot \tau)$ l'extensité associée, ou l'on voit encore le rôle que joue alors un calibre de scaling, jauge d'échelle associable à τ . Au niveau microscopique un temps physique complexe s'écrit $t = t + it'$, alors toute fonction réelle T susceptible d'être une observable prend la forme $T = t \cdot t^* = (t + it')(t - it')$ et de même les dérivées par rapport au temps Newtonien $dT/dt = (d\tau/dt) \cdot \tau^* + \tau \cdot (dt^*/dt)$ ce qui implique de réécrire l'équation de continuité ci-dessus avec $T = t \cdot t^*$. Cette dernière équation peut être linéarisée conformément à la méthode d'Erwin Madelung conduisant à une équation de type Schrödinger $V_\tau = (A/i) \nabla[\ln(\tau/\tau^*)] = (A/i)[\nabla(\tau)/\tau^* - \tau/\nabla(\tau^*)]$ soit encore

$$(2.25) \quad V_\tau \cdot (\tau \cdot \tau^*) = (A/i)[\tau^*(\tau)\tau^* - \tau \cdot \nabla(\tau^*)]$$

Soit après transformations avec usage de la fonction auxiliaire $F \neq 0$

$$(2.28) \quad [(d\tau/dt) + (A/i)\Delta\tau] / [(d\tau/dt) - (A/i)\Delta\tau] = -\tau \cdot F / \tau^* \cdot F$$

équivalente à (2.29) $(d\tau/dt) + (A/i)\Delta\tau + \tau \cdot F = 0$ et à (2.30) $(d\tau^*/dt) - (A/i)\Delta\tau^* - \tau^* \cdot F = 0$ avec les équations aux dimensions : $[A] = L^2 t^{-1}$, et $[F] = t^{-1}$ soit une fréquence. En fait on pourra voir plus avant que ces équations définissent des processus d'auto-organisations.

2.3. Modèles de temps physique

La finalité de toutes sciences est de prédire le futur et d'expliquer le passé en partant de connaissances acquises au présent. Le temps a donc un rôle central à y jouer. La démarche a toujours pour objet de considérer le changement d'un état pendant une durée donnée puis d'extrapoler les résultats acquis selon une perspective choisie. Ce temps d'observation correspond aussi à l'oscillation pendulaire du lustre de la cathédrale de Pise (origine de l'intuition de Galilée) qu'à l'oscillation verrouillées entre deux niveaux hyperfins de l'atome de césium. La fiabilité de l'anticipation tient évidemment la stabilité temporelle de l'oscillation considérée, soit sa permanence dans le temps. En soit l'oscillation ne conduit à aucune information sur le passé ou le futur. L'oscillation homogénéise notre histoire. Or si l'on peut aisément bruler cette note, en l'absence de mémoire il nous est impossible d'en reconstituer facilement le contenu à partir des seules cendres. L'horloge ne dit rien de cela alors qu'à l'opposé notre conscience nous avertit de l'existence du flux temporelle auquel nous sommes soumis sans pouvoir nous y opposer plus qu'à un devenir toujours incertain. Bien qu'il construise une histoire de l'univers, le point de vue depuis la physique relativiste ne change rien à l'hypothèse d'un temps local qui est étranger à notre conscience. En pratique, l'extrapolation permettant de passer de l'observation dans la durée au tracé des perspectives passées et futures, repose nécessairement sur des transformations susceptibles de se ramener localement à des applications linéaires. La vision Newtonienne reste en arrière-plan comme une référence. On doit à Ernst Mach (1838-1916) la mise en évidence du paradoxe d'une temporalité contestable car très éloignée tant de la perception que nous en avons que de l'histoire qui nous détermine. Or on peut observer que le paradoxe peut être résolu en observant que le temps physique « τ » et le temps mathématique « t » doivent être distingués même s'ils sont ultérieurement liés par une simple homothétie $\tau=at$ (2.31). Cette distinction préalable conduit à deux types de dérivées spatiales par rapport au « temps » : $v=dx/dt$ et $v=dx/d\tau$. En posant $a=1$, on impose donc implicitement le statut d'un temps particulier caractérisé par une continuité et donc un plongement de la mesure dans corps des réels. L'équation 2.31 justifie par avance la pertinence du calcul différentiel alors que l'isotropie et l'homogénéité, garantissent des règles de conservation de l'énergie conforme au principe d'invariance temporelle des lois physiques (Noether). En pratique, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ soit encore $\Delta t \in \mathbb{R}$. Sous cette forme Δt n'apparaît que comme une simple incertitude ($\Delta t \sim 10^{-16}s$). Toute mesure d'espace s'exprime également sur le corps des nombres réels et dans ce cadre la notion de vitesse devient une grandeur absolue, homogène et isotrope conformément à la représentation newtonienne $t=a\tau$ avec $a=1$.

Tout change avec les représentations de Lorentz, de Poincaré, d'Einstein et de Minkowski car l'espace point faisant intervenir le temps impose $a=ic$ avec $(i)^2=-1$ et donc (2.33) $\tau=ict$ grandeur qui possède la dimension d'une longueur. L'élément de distance ds prend la forme quadratique désormais bien connue (2.34) : $ds^2=c^2dt^2-dl^2$ dans laquelle c n'est autre que la vitesse de la lumière. Le temps complexe de Poincaré Minkowski impose une invariance de l'élément de distance par couplage espace-temps. Une distance nulle entre deux points ne signifie plus que ces derniers aient même coordonnées puisque la temporalité intervient dans la définition de l'élément de distance. Elle est nulle en particulier si le carré du temps physique complexe est égal au carré de la longueur géodésique. Il en résulte que la simultanéité est perdue et donc le modèle relativise la notion de causalité entre deux évènements. Nonobstant les problématiques d'intrications, celle-ci doit être divisée en 3 classes : (i) causalité standard de type temps $c\Delta t < \Delta s$; (ii) une a-causalité de type espace $c\Delta t > \Delta s$: les évènements ne peuvent pas être liés causalement car la vitesse de la lumière est insuffisante pour transmettre l'information ; enfin (iii) le cas limite dit de type Cône de lumière si $c\Delta t = \Delta s$. Il est possible de transformer une classe d'évènement en une autre en utilisant les transformations de Lorentz. En pratique, toute relation de type $\tau=f(t)$ constitue un modèle de temps physique dans lequel t est le temps newtonien réel. Trouver une forme pertinente de temps physique exige paradoxalement d'oublier temporairement la notion de temps pour s'attacher d'abord aux liens entre des évènements. Le 20^{ème} siècle s'attacha tout particulièrement à la notion de dilatation du temps mesuré par des observateurs distincts. Par exemple en mouvement relatif avec la vitesse v . Dans ce cas $\tau = \gamma_c t$ avec $\gamma_c = [1-(v^2/c^2)]^{-1/2}$

^{1/2}. De même si deux observateurs se trouvent dans des potentiels gravitationnels $\varphi = -GM/R$ différents $\tau = \gamma_g t$ avec $\gamma_g = [1 + (2\varphi/c^2)]^{-1/2}$. Dans les deux cas la dilatation temporelle tient à la structure de l'espace-temps et le statut de la variable tau est celle d'une longueur. C'est dans ce sens que tau est un temps « physique ». On doit cependant à K. Godel l'observation selon laquelle certaines solutions des équations d'Einstein conduisent à des causalités bouclées, quelque chose comme des récursivités causales. Godel offrit à Einstein pour son 70^{ème} anniversaire (1947) des univers à boucles qui instillèrent le doute dans l'esprit de ce dernier quant à la pertinence de ses équations. Ce faisant Godel ouvrait la voie à des classes de couplages non linéaires comme en proposait déjà à l'époque Willem de Sitter (1917) et selon lesquels $\tau = [1 - (r^2/R^2)]^{1/2} t$. ou Edward Milne (1933) avec $\tau = [1 + \log(t/t_0)] t_0$. Tous ces modèles non linéaires pointent une asymétrie temporelle susceptible de conforter l'idée d'une flèche du temps et d'un rythme propre du temps physique. Mais une question demeure : comment choisir ces modèles sans s'appuyer sur des données expérimentales ? Ils peuvent être écrit $F[t, x_i, \dots] = 0$ ou $\Phi[\tau, x_i, \dots] = 0$ dans lesquels x_i sont des observables. Soit encore $F[f(y), y, x_i, \dots] = 0$ ou $\Phi[\varphi(y), y, x_i, \dots] = 0$ avec $t = f(y)$ et $\tau = \varphi(y)$, y étant une observable dépendante du temps (par exemple la luminosité d'une étoile r_L est liée à sa distance et le décalage spectral dans le rouge peut être estimé au moyen d'une vitesse de lumière constante) $t = r_L(z, \dots)/c$ ainsi que tau. La comparaison avec les données expérimentales permet de juger de la pertinence et de l'utilité de penser un temps irréversible dans un environnement non linéaire.

Mesure relativiste et décélération du temps cosmique

La première idée à mettre en œuvre est que le temps propre d'un phénomène est fondamentalement irréversible par rapport au temps de Newton t soit encore : $\tau(-t) \neq \tau(0) \neq \tau(+t)$. La seconde idée consiste à conjecturer que les phénomènes sont régis par un principe de moindre action. La troisième hypothèse tient à la constante de la vitesse de la lumière. Dans la formulation ci-dessus, t est le temps de Newton ; temps d'une horloge (atomique par exemple) dont le sens et la vitesse de rotation sont indifférents pourvu qu'ils soient constants. Il y a donc deux « mesures » distinctes de temporalités ce qui revient à écrire : $\tau = a(\tau).t$; $\lim_{\tau \rightarrow 0} a(\tau) = 1$, $a(+\tau) \neq a(-\tau)$; soit encore en faisant intervenir c , la vitesse de la lumière, $l = c\tau$ et $r = ct$, $l = a(\tau).r = a(l/c) r$ avec $\lim_{l \rightarrow 0} a(l/c) = 1$. Il s'en suit que l'équivalent de la géodésique sur l'espace-temps inhomogène fondée sur le temps discret, n'est pas une fonction d'état (elle ne dépend pas des bornes de la géodésique) mais aussi de la taille des parcours. Sous forme différentielle $dl = a(\tau).dr$ ce qui conduit à $ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau).dr^2$, relation habituelle en cosmologie (univers sphérique et plat en expansion) mais ici avec un temps distinct du temps de Newton habituel. Il en résulte que l'expansion n'est pas ici cinématique mais correspond à une « expansion sans mouvement apparent » associée à une irréversibilité du temps et une inhomogénéité de l'espace-temps par ailleurs stationnaire. Aucun point n'est privilégié et il n'y a pas d'instant initial. En donnant au facteur d'échelle la forme $a = r/R_0$, il vient

$$(2.42) \quad d\tau/dt = a$$

$$(2.43) \quad da/dt = a da/d\tau$$

le temps discret (irréversible) les paramètres de décélération de l'expansion suivants peuvent être utilisés : $q_t = -(ad^2a/d^2t)/(da/dt)^2$ et $q_\tau = -(ad^2a/d^2\tau)/(da/d\tau)^2$. Des valeurs positives (respectivement négatives) correspondent à une décélération (respectivement une accélération). En considérant la décélération on peut prouver le théorème cinématique suivant concernant le « temps spiral » [TAI05] :

$$(2.44) \quad q_t = q_\tau - 1$$

Il s'en suit que selon les valeurs des facteurs q , nos représentations de la cosmologie aboutiront à des résultats opposés selon le statut du temps qui sera utilisé. Par exemple une décélération modérée dans le cadre temps physique ($q_\tau < 1$) apparaîtra comme une accélération ($q_t < 0$) dans le cadre temps newtonien. Un mouvement constant en temps newtonien ($q_t = 0$) donnera lieu à une observation

accélérée en temps physique. Ces effets seront semblables à ceux auxquels donne lieu le passage d'un référentiel inertiel à un référentiel non inertiel. Considérons le facteur d'échelle spatiale $a=r/R_0$ avec R_0 constant, alors la relation 2.44 conduit à 2.45

$$(2.45) \quad d^2r/d\tau^2 = R_0 [(d^2r/dt^2)/r^2 - (dr/dt)^2/r^3]$$

Il résulte de cette formulation que la seconde loi de Newton $F=m d^2r/d\tau^2$ appliquée en utilisant le temps physique fait apparaître une force virtuelle en temps newtonien. A titre d'exemple un mouvement inertiel (vitesse constante) en temps newtonien donnera lieu à une force de décélération $F \sim -R_0 (dr/dt)^2/r^3$ en temps physique, phénomène signalé très tôt par Willem de Sitter and Edward Milne [SIT33] et [MIL33].

Le principe de moindre action posé avec les mêmes bases physique $S=\text{const}$ avec $dS/d\tau=0$. En considérant l'impulsion $p_r \sim dr/d\tau$ sur la géodésique, on peut écrire $S = p_r \cdot r = \text{const}$, soit en utilisant le facteur d'échelle a , la relation :

$$(2.46) \quad a \cdot da/d\tau = A = \text{const}$$

Pour les conditions initiales $a=1$ et $\tau=0$, $a=(1+2A\tau)^{1/2}$ soit en utilisant 2.42 et 2.43 $d\tau/dt=(1+2A\tau)^{1/2}$ soit encore avec les conditions initiales $t=0$ et $\tau=0$,

$$(2.47) \quad \tau=t+At^2/2 \quad \text{et} \quad a=(1+2A\tau)^{1/2}$$

$$(2.48) \quad t=A^{-1}[(1+2A\tau)^{1/2}-1] \quad \text{et} \quad a=1+At$$

Ces relations définissent les transformations entre les deux classes de temporalités répondant au principe de moindre action pour des conditions initiales standards.

Considérons maintenant le cas le plus simple ou le flux ϕ_q dérive d'un potentiel ϕ , soit $\phi_q = \nabla\phi$. Attendu ce qui précède le flux de temps physique est donné par

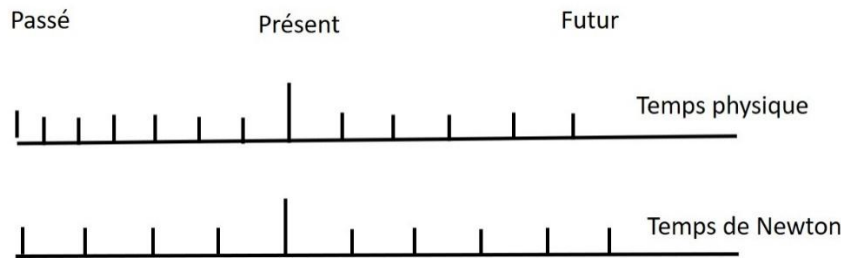
$$(2.49) \quad q_t = d\tau/dt = \nabla_t\tau = 1+At = (1+2A\tau)^{1/2}$$

Il en résulte que le flux de temps physique est comprimé dans le passé et plus étendu dans le futur . la détermination de la constante A , utilise le principe de mesure en relativité, soit encore (1.36) $a = r/R_0 = 1+z = \lambda/\lambda_0$ avec $cz=Hr$ (loi de Hubble pour les conditions initiales $r=z=0$) où $H=c/R_0 = (da/dt)/a = A/(1+At)$ est la constante de Hubble, loi qui repose sur l'effet doppler $\omega=\omega_0[(c-V)/(c+V)]^{1/2}$, si V est la vitesse apparente d'expansion de l'univers. Pour t petit $H \cong A$, d'où

$$(2.50) \quad \tau=t+Ht^2/2 \quad \text{et} \quad t=H^{-1}[(1+2H\tau)^{1/2}-1]$$

Cette équation démontre un accroissement progressif du temps physique dès lors que l'on considère un développement strictement linéaire du temps newtonien. Ceci revient à une expansion de l'unité de temps physique lorsque que l'aiguille de l'horloge tourne à vitesse constante. Il s'agit d'une décélération du pas de temps cosmique $\Delta\tau^{-1}$. Il s'agit d'une situation qui relativise radicalement la notion de temps de Newton qui apparaît alors comme une simple référence de mesure vis à vis de laquelle le « temps physique » est analysé. On utilise ici le qualificatif physique exactement de la même manière que les physiciens l'utilisent pour distinguer le « vide physique » du singleton ou de l'ensemble vide (\emptyset et $\{\emptyset\}$).

Dans ces conditions, la flèche du temps est l'expression de la dérivée du pas de temps. Certes $+t+(-t)=0$ si on se réfère à l'horloge newtonienne de référence ; mais $\tau(t)+\tau(-t) \neq 0$, relation qui permet de créer une distinction entre le passé $\tau/t= 1-t.H/2$ et le futur $\tau/t= 1+t.H/2$.



L'asymétrie $+t \rightarrow -t$ et $+r \rightarrow -r$ est donc une des caractéristiques à examiner lorsqu'on s'intéresse à un modèle cosmologique. Par exemple dans le cas d'un espace homogène de Minkowski $r = ct$ $A_t=0$ et $A_r=0$ le modèle est symétrique. Par contre considérons le modèle avec $r = c\tau(t)$, alors $A_t = \tau(t) + \tau(-t) = Ht^2 > 0$ et $A_r = c\tau(t) + c\tau(-t) = cHt^2 > 0$. Comme la constance de la vitesse de la lumière qui résulte du principe de relativité, la constante de Hubble H apparaît comme une constante cinématique de mesures autosimilaires. Elle établit un lien avec un temps physique intrinsèquement asymétrique. On observera que cette asymétrie est en cohérence avec la notion de dilatation du temps relativiste (transformations de Lorentz) sous l'effet de vitesse différentielle des référentiels et au-delà de l'accélération. Il va résulter de cette asymétrie de nombreux phénomènes physiques plus nouveaux encore car l'asymétrie considérée tient à la prise en compte de référentiels qui ne considèrent pas les mêmes échelles. Par exemple la loi de Hubble H sous la forme $r = c/H(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, peut être considérée comme une des coordonnées spatiales d'une ligne de mire microphysique pour un photon examiné dans un système de référence macroscopique. Toutefois ce changement de référentiel implique aussi une transformation du temps sous la forme $\tau/t = 1 + t.H/2$. Vu tant comme donnée expérimentale que comme constante fondamentale $H = 9Gh/16c^2r_e^3$ [où r_e est le rayon de l'électron : Taganov 2008] et dans la relation où z est le décalage vers le rouge, $z = Ht$, la dimension de H est l'inverse d'un temps $[H] = s^{-1}$ ($H = 1.970 \cdot 10^{-18} s^{-1}$). En termes d'espace $cz = Hr$ alors $[H] = [V]/L = (kms/s)/Mpc$ avec Mpc en mégaparsecs : ($H = 61,6 (Kms/s)/Mpc$). On notera que $1(km/s)/Mpc = 3.2 \cdot 10^{-20} s^{-1}$.

La formulation théorique de H montre le caractère quantique intrinsèque de la constante de Hubble et en conséquence le fondement quantique de l'asymétrie du temps physique. Si la constante de Planck est prise à zéro, la constante de Hubble s'annule et de même le décalage vers le rouge. Ainsi le principe de moindre action utilisé en cosmologie en prenant en compte le temps physique irréversible pont le monde macro et micro par le truchement des constantes fondamentales [COH91].

Au plan expérimental de multiples données peuvent contribuer à donner crédit à l'idée de temps physique. Il s'agit certes le plus souvent d'écarts au modèles cosmologiques, par exemple des variations de rotation de la terre avec l'âge des mesures qui peut être expliqué non par des ajustements *ad hoc* de l'influence du soleil et de la lune mais par un simple changement de référence temporelle utilisant le temps physique, donc la constante de Hubble. De même des observations des planètes comme mars venus et mercure mettent en évidence des accélérations liées aux mouvements orbitaux moyens. Là encore l'introduction dans le modèle du temps physique (donc de la constante de Hubble) en lieu et place du temps de Newton donne des approximations de facteurs correctifs parfaitement pertinent.

La manifestation la plus impressionnante de la décélération du temps physique par rapport au temps de Newton et ce que nous appellerons l'illusion de l'expansion de l'univers. Une analyse des données expérimental obtenues à partir du modèle cosmologique standard, conduit, reporté sur le concept de temps physique $q_t = q_t - 1$, à donner la valeur $q_{te} = -0.56 \pm 0.11$ (2.88), autrement dit une accélération de l'expansion de l'univers dans un modèle standard conduit à une valeur négative du paramètre de décélération du temps physique. Dans ce contexte une décélération modérée ($q_t < 1$) de l'expansion de l'univers correspond à une expansion accélérée ($q_t < 0$) en temps newtonien. Si l'on s'en tient aux

données expérimentales l'expansion de 'univers'¹ ne serait pas en accélération mais en décélération. La difficulté du traitement des données expérimentales tient au fait que les modèles habituels ne considèrent que le temps standard et non le temps physique qui fonctionne comme un accordéon si on le compare au temps universel Newtonien.

2.4. Temps et Anti-Temps

De nombreuses critiques peuvent être adressées tant à la notion de temps newtonien qu'à la notion de Poincaré-Minkowski. Par exemple le temps absolu de Newton sur \mathbb{R} ne peut donner aucun contenu ou mesure au présent ou à l'instant. Les deux types de temps dualisent le passé et le futur en sorte que la distance entre eux puisse décroître à l'infini. Cette propriété est en contradiction avec la théorie de l'information et plus paradoxale encore la physique quantique². La question de l'inversion du signe donc de l'orientation du temps reste une question ouverte donnant lieu à de multiples tentatives d'entendement et de controverses. Au plan cosmologique la raison physique la plus simple quant à l'irréversibilité naturelle du temps serait de l'associer à l'expansion ou/et à une croissance de l'entropie de l'univers. Plus fondamentalement, l'irréversibilité du temps s'inscrit très naturellement dans le dualisme qui semble gouverner les lois physiques alors même que les temps de Newton ou de Poincaré Minkowski excluent toute dualité réelle (entités/anti entités). Le changement de signe dans les modèles de temps standards, ne peut être considéré comme une dualité car les relations causales n'en sont pas affectées. Pour comprendre les enjeux associés à une réelle dualité peut-être faut-il revenir sur l'histoire de ce concept sans attacher le raisonnement, au moins dans un premier temps, à la notion moderne de transformation géométrique.

L'idée qui a guidé les philosophes grecs chronos est celle du courant fluviale entre des berges stables. Soit on est dans le fleuve est dans ce cas le futur (aval) devient le passé (amont). Soit on est sur la berge est le passé (amont) devient le futur (aval). L'espace-temps est en jeu. Le flux est vu comme un continuum à une dimension (1D). Ce schéma de pensée fonde toute les sciences naturelles la puissance de Galilée (transformation linéaire) puis de Newton (temps absolu) est d'avoir été capable (avec Leibniz infiniment plus subtil dans son analyse) de définir le formalisme disruptif permettant de faire du temps un outil opérationnel pour l'ingénierie. Dans le contexte 1D la notion d'anti temporalité n'a pas de sens car le seul degré de liberté disponible et un changement de signe, action purement nominaliste.

Sans doute est-ce en se tournant vers les cultures non européennes, et en particulier de la mythologie védique que l'on comprend bien mieux les enjeux de la notion d'anti temps. Dans la philosophie indienne le temps est central dans l'approche de la cosmogonie. Ainsi, le mot sanskrit « Kala » associé au dieu soleil, personnifie le caractère cyclique des événements et du temps. La théologie indienne moderne considère le temps comme une forme d'énergie (Shakti) mise en œuvre par Shiva et Vishnu. Cette énergie serait à l'origine du processus de création/destruction cyclique. A la fin d'une époque (Kalpa) le feu brule le temps (Kala Agni) et le temps se dévore lui-même pour devenir Maha-Kala, un temps transcendant absolu. Une époque excluant l'apparence né alors (Pralaya). La représentation de cette essence temporelle est la roue du Kala-Chakra symbole du temps cyclique, symbole de la dualité (Lumière et Ténèbres). Selon la tradition indienne le temps est naturellement de dimension 2D. Il porte naturellement en lui la notion de « pas de temps », quel que soit le sens de rotation de l'horloge. Toutefois à ce stade l'inversion du sens peut donner un contenu de temps et d'anti temps au sens de rotation du fait de la dimension 2D du statut du temps. Ce contexte conduit à accorder au temps physique le statut d'un nombre complexe. Soit encore

$$(2.91) \quad \tau(t) = t[F(t) + i\Phi(t)] = |\tau(t)| \exp[i\varphi(t)]$$

¹ Que beaucoup de théoriciens rattachent à la valeur non nulle de la constante cosmologique (Einstein) mais est aussi associée à l'énergie noire, soit ¼ de l'énergie de l'univers.

² On notera qu'Alain Connes lève le paradoxe en s'appuyant sur la théorie de Tomita Takezaki. Le temps devient une variable émergente.

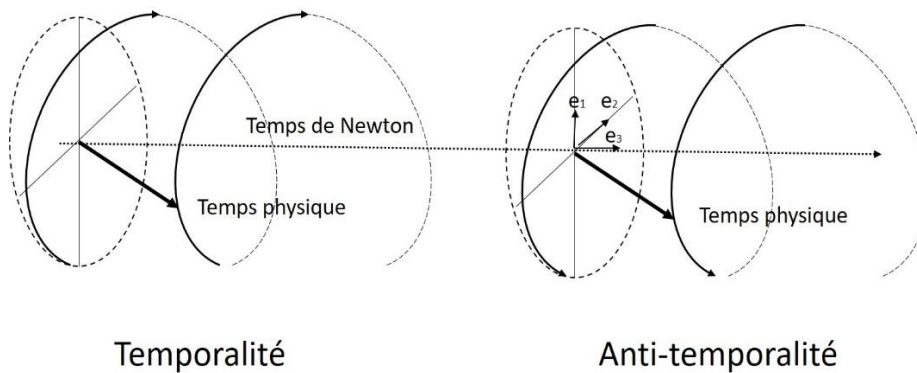
Le modèle de Newton conduit à $\tau=t$ et le modèle de Poincaré-Minkowski à $\tau=it$. En pratique la relation 2.91 n'est autre alors que l'équation d'une spirale. Il est facile de révéler le caractère irréversible du temps physique en considérant la relation 2.42 soit $d\tau/dt = a$. Il vient pour des conditions aux limites standards $\tau=at$ ($a=1$ et $a=i$ respectivement pour les deux modèles précédents). La clé de l'analyse de l'irréversibilité repose alors sur le facteur d'écart $(\tau-at)$ qui peut servir à un développement en série : $d\tau/dt = a_0+a(t)(\tau-at)+a_1(t)(\tau-at)^2+\dots$. En admettant le facteur petit on peut écrire : $d\tau/dt \cong a_0+a(t)(\tau-at)$ avec les modèles standards pour solutions particulières on est conduit à $\tau=a_0t + \exp[\theta(t)]$ avec $\theta(t) = \int a(\xi).d\xi$ soit avec l'usage de la fonction auxiliaire $\theta(t)=\ln[\tau_0(t)] + it\theta_0(t)$,

$$(2.93) \quad \tau = a_0t + \tau_0(t) \exp[it.\theta_0(t)] = a_0t + \tau_0(t) \{ \cos[t.\theta_0(t)] + i \sin[t.\theta_0(t)] \}$$

ainsi on voit apparaître un angle de phase $\psi(t) = t.\theta_0(t)$ ce qui conduit à la formulation vectorielle

$$\tau = e_3.\psi(t)/\theta_0(t) + e_1.\tau_0(t) \cos[\psi(t)] + i e_2.\tau_0(t) \sin[\psi(t)]$$

Pas de l'hélice est donné par $\Delta_\tau(t) = |2\pi/\theta_0(t)|$



L'analyse du temps spiral ainsi conçu conduit à ce qu'à côté de la grandeur scalaire $\tau_0(t)$ apparaît le paramètre $\theta_0(t)$, comme pseudo scalaire du fait de la torsion $\chi(t)$ est elle-même un pseudo scalaire du fait que le changement de signe $t = e_3.t$ est associé au changement d'orientation vectorielle de e_3 . Afin que les choses soient claires, on peut introduire le signe de torsion (droite ou gauche) du temps physique $s=\pm 1$ en sorte qu'il apparaisse dans le pas de temps physique $\mathfrak{T}(t)=s.\theta_0(t)$ avec $s=\pm 1$ (2.97), soit encore la conjugaison complexe (avec $a_0=1$)

$$(2.98) \quad \tau = t + \tau_0(t) \exp[it.\theta_0(t)]$$

$$(2.99) \quad \tau^* = t + \tau_0(t) \exp[-it.\theta_0(t)]$$

On peut qualifier ces deux relations par les termes « temps physique » torsion à droite et « anti-temps physique » torsion à gauche. Evidemment cette inversion n'a rien de commun avec un changement de signe du temps puisque $\tau = -t + \tau_0(t) \exp[it.\theta_0(t)]$. Un tel résultat est obtenu parce que la torsion pseudo scalaire s et le pas de temps $\mathfrak{T}(t)$ changent de signe avec le changement de signe du temps, à savoir par une inversion du vecteur de base e_3 entraînant la mise en œuvre du facteur $\exp[+it.\theta_0(t)]$. L'irréversibilité du temps physique complexe est une propriété structurale du modèle. Toute tentative visant à changer l'orientation du temps physique par inversion du temps Newtonien est une tentative aussi vaine que de visser un écrou par rotation à gauche alors que le pas de vis est à droite ou vice versa.

Le pas de temps physique $\Delta_\tau(t)$ est lié à l'hélicité. La relation $\Delta_\tau(t) = |2\pi/\theta_0(t)|$ induit que $\theta_0(t)$ est le plus petit temps physique à considérer. Le pseudo scalaire temps $\mathfrak{T}(t)$ n'est autre que le pas de temps élémentaire, donc une jauge, et sa dimension est celle d'un inverse de temps ; il s'agit donc d'une fréquence qui joue le rôle d'une vitesse de rotation d'une horloge universelle que nous percevons comme un pas de temps. La valeur absolue de cette fréquence diminue avec $\theta_0(t)$, ce qui correspond à une décélération du pas de temps physique.

Ainsi, en revenant à la roue indienne du temps, dite du Kala-Chakra, on peut observer que l'idée du temps spiral, correspond à l'approche indienne du temps prenant en compte deux classes de rotations. Le ralentissement d'une rotation peut correspondre à une augmentation du diamètre de la roue.

Ainsi arrive-t-on aux comparaisons qui permettent d'affirmer que si le temps de Newton ou de Minkowski-Poincaré est 1D, le Védic Kala-Chakra est 2D mais que le temps spiral complexe est en pratique 3D.

Le brillant astronome russe Nikolai A. Kozyrev (1908-1983) a, à notre connaissance, été le premier à concevoir la possibilité de deux états de symétrie et à traiter la variable temps comme un pseudo champ de vecteur dans l'espace. Ce faisant il interrogeait explicitement la notion de causalité non seulement en lien avec l'existence d'un temps physique mais encore avec la notion d'évènement dans ce champ de vecteurs. Kozyrev écrivait par exemple « à partir de nos axiomes il suit que le flux de temps doit être défini par rapport à l'espace...et la direction du temps doit être définie comme une direction dans l'espace ». Ainsi selon Kozyrev, le temps doit être représenté comme un pseudo vecteur spatial 3D dans un espace lui-même 3D, le changement de signe entraînant le remplacement de la cause par l'effet. Le temps spiral tel que défini ne peut s'inscrire dans la vision qu'en a Kozyrev car il doit être traité comme un objet complexe pour lui-même, susceptible d'être introduit dans l'espace-temps habituel 4D, En outre, nous n'établissons à ce stade de l'analyse aucun lien avec la notion de causalité entre évènements connectés.

Au-delà se pose la question du statut de l'énergie dans le contexte du temps physique. En 1918 la mathématicienne allemande Emmy Noether (1882-1935) a démontré un théorème établissant un lien entre des propriétés de symétries de l'espace-temps et les lois de conservation en physique. En particulier, elle a établi que toute invariance par rapport à la translation dans le temps est la raison fondamentale de conservation de l'énergie. Une telle propriété est acquise pour les échelles de temps de Newton mais aussi celles de Poincaré Minkowski. Dans le cas du modèle de temps spiral (2.93) marqué par une variabilité de phase et d'amplitude, les principes de Noether écartent le modèle de temps homogène, les symétries en jeu changent leurs effets et en particulier la conservation de l'énergie devient un « générateur d'énergie » la conservation ne pouvant réapparaître que *dans le cas d'une quantification du temps*. Dans le cadre d'une décomposition vectorielle de la variable temporelle $t \rightarrow t_1, t_2, t_3$, l'hypothèse d'uniformité du temps s'exprime de la manière suivante :

$$(2.101) \quad |\tau(t_1) - \tau(t_2)| = |\tau(t_1+t_3) - \tau(t_2+t_3)|$$

Relation qui ne peut être valide dans 2.93 que *si les conditions de dénombrabilité sont acquises*. Dans le modèle le plus simple de temps spiral :

$$(2.102) \quad \tau = t + \tau_0(t) \exp[it \cdot \theta_0(t)] \quad \theta_0 = 2\pi/\tau_0 = \text{const.} \quad \mathfrak{S}_0 = s \cdot \theta_0 \quad t = n \tau_0, n \in \mathbb{N}$$

La condition de dénombrabilité piège le cosinus de la représentation complexe à la valeur 1 et le sinus à la valeur zéro, soit encore ici pour le pas de temps $\Delta_\tau = |2\pi/\theta_0| = \tau_0$ et pour le ratio courbure sur torsion $k/\chi = \pm 2\pi$. Toutes les conditions d'inertie sont alors respectées, mais pour autant les conditions d'isotropie ne le sont plus. L'ensemble des temps physique positifs servent de référence pointant explicitement l'irréversibilité du temps ; $A_s = |\tau(+t) + \tau(-t)| = 2 \tau_0 > 0$ alors que l'espace conserve sa symétrie $A_x = |x + (-x)| = 0$ en considérant l'intervalle d'espace pour les temporalités traditionnelles, $A_{x,s} = 2c \tau_0 > 0$, et donc il existe aussi une asymétrie de l'espace associée au temps spirale. Par ailleurs,

on aura : $|\tau - t|=0$ pour le modèle de Newton, $|\tau - t|=2^{1/2} t$ pour le modèle de Poincaré-Minkowski (P.M.), $|\tau - t|/\tau = \tau_0$, pour le modèle spirale dénombrable ci-dessus.

Il est ici particulièrement intéressant d'examiner les grands choix philosophiques grecs par exemple le choix de Démocrite (~ 460-370 av J-C) quant au principe d'inertie : Démocrite affirme, que tout mouvement amorcé se prolonge indéfiniment sans changement. Depuis les travaux de Galilée cette affirmation a été formalisée et utilisée en physique. Sa réflexion théorique s'est explicitement opposée à la tradition aristotélicienne selon laquelle, le mouvement s'arrête s'il n'est pas mû par une force. Les deux approches fondent le principe de causalité : seule au moins une force (ici force d'inertie) peut causer l'altération du mouvement d'un corps (effet). Quand est-il avec le temps physique ? Si $dl/dt = \text{const.}$ alors $dl/d\tau = \text{const.}$ Ces deux relations conduisent à $dt/d\tau = \psi$ avec $\psi = \text{const.}$ [$\psi=1$ (Newton), $\psi=i$ (Poincaré, Minkowski) et $\psi=1+2i\pi$ pour le temps spirale sur ensemble dénombrable : $t = n \tau_0$ si $n \in \mathbb{N}$].

Il est possible d'illustrer la différence d'interprétation du mouvement en temps newtonien et en temps physique complexe τ . Prenons le cas d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse u (masse m) en temps complexe τ . L'invariance d'un intervalle 4D pour un corps en mouvement ($dl > 0$) ou au repos ($dl = 0$) s'écrit $ds = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 d\tau^2$ (2.107). Cette relation est utilisée en relativité pour définir le temps propre τ d'un corps en mouvement. Par ailleurs, nous pouvons écrire $u_s^2 = (ds/d\tau)^2 = c^2$ (2.108). Cette équation est celle des « isotachs ». Considérons la trajectoire c d'un corps de masse constante en mouvement sur une géodésique (droite) : $x_\tau = u\tau$ (2.109). En utilisant la formule (2.102) et prenant en compte (2.109) on peut écrire (2.110) : $x_t = u[t + \tau_0 \cos(2\pi t/\tau_0)] + i u \sin(2\pi t/\tau_0)$ avec $t = n \tau_0$ et $n \in \mathbb{N}$. Cela correspond à une discrétisation du temps newtonien, soit un épaississement du « présent » qui ne peut pas être inférieur à τ_0 (durée du présent). L'analyse de (2.110) montre que le mouvement uniforme en temps physique, conduit à diviser le moment newtonien en deux sous-ensembles. Une partie relève de la puissance du continu. Cette partie correspond au domaine d'incertitude totale associée à la composante imaginaire de la représentation. Une seconde partie de la formulation considère la composante réelle dénombrable des moments en jeu. Ainsi, le corps en mouvement disparaît et réapparaît selon un processus de rénovation permanente, avec une unité τ_0 . Ainsi, le mouvement consiste en un continuum d'intervalles finis (présent continu) d'épaisseur τ_0 . Le passé et le futur relève quant à eux du champ du dénombrable, ensemble de mesure nulle par définition. Cette approche permet de traiter le paradoxe de Zénon d'Elée : (i) le temps est composé de présent indivisible dans laquelle la flèche n'est pas au repos. (ii) cependant, la flèche doit être considérée au repos, sur l'ensemble dénombrable de mesure nulle. Cet ensemble particulier ne constitue aucun intervalle temporel fini. Nous voyons là l'importance de la dualité continue/discret qui constitue ici l'ombilic du temps que nous avons qualifié de physique.

A la fin du 19^{ème} siècle, on doit aux travaux de William Clifford, August Möbius, Louis Poincaré et Michel Chasles l'introduction du concept de « visse mathématique ». C'est en 1895 qu'Alexander P. Kotelnikov a publié à Kazan, une première monographie concernant le « calcul hélicoïdal » avec application en géométrie et mécanique. Ce calcul considère une paire de vecteurs colinéaires, $(\mathbf{r}, \mathbf{r}^\circ)$ associée à un point zéro. \mathbf{r} est le vecteur visse, \mathbf{r}° est le vecteur moment hélicoïdal. On a $\mathbf{r}^\circ = p \mathbf{r}$ où p est un paramètre de visse. En termes de calcul hélicoïdal, le temps physique complexe selon la relation (2.102) est déterminé par la structure de la visse avec un unique vecteur \mathbf{e} :

$$(2.111) \quad (\epsilon t \theta_0, \epsilon t / \tau_0) \text{ avec } \theta_0 = 2\pi / \tau_0 \text{ et } p = \pm 1/2\pi.$$

Selon le calcul de type Clifford, le calcul hélicoïdal est vu comme calcul avec des nombres complexes $\mathbf{r} + \omega \mathbf{r}^\circ$ avec $\omega^2 = 0$, et m tel que $m = |\mathbf{r}| \exp(\omega p)$ (module hélicoïdal complexe). Le temps hélicoïdal correspondant à (2.102) s'exprime de la manière suivante dans le formalisme de Clifford :

$$(2.112) \quad \mathbf{r} + \omega \mathbf{r}^\circ = \epsilon t (\theta_0 + \omega / \tau_0) \text{ avec } \theta_0 = 2\pi / \tau_0 \text{ et } m = |t| \exp(\pm \omega / 2\pi).$$

Bien que le calcul hélicoïdal soit peu connu il peut être utilisé pour traiter du temps physique complexe. Le modèle de temps hélicoïdal avec $\tau_0 > 0$ ne donne pas seulement une épaisseur au présent mais aussi une quantification précise du temps sans passer par une quelconque théorie quantique. La quantification en jeu passe par la relation (2.102) comme une conséquence de l'homogénéité visant à maintenir une conservation de l'énergie donc d'adhérer par la bande aux contraintes de symétries de Noether. A ce stade deux questions surgissent : (i) pourquoi voit-on apparaître l'axiome d'une limite donnée par la vitesse de la lumière ? (ii) pourquoi apparaît-il dans les données expérimentales sur les particules cosmiques une limites énergétique proche de 10^{21} eV ?³ Y aurait-il une limite pour l'énergie des particules élémentaires ? Afin de répondre à ces questions il est intéressant de donner un ordre de grandeur physique au paramètre τ_0 ⁴. Cette grandeur n'est pas aujourd'hui accessible expérimentalement. On peut cependant en avoir une estimation en partant de l'ordre de grandeur des quarks telle que connu actuellement soit 10^{-16} m. En utilisant la vitesse de la lumière on arrive à $\tau_0 < 10^{-24}$ s. On peut évidemment utiliser les méthodes mises au point par Georges Stoney et Marx Planck mais ces méthodes utilisent la vitesse limite de la lumière qui biaise alors naturellement un raisonnement que l'on souhaite plus rigoureux. L'idée est de partir des constantes fondamentales de la physique {e,G,h} en utilisant ensuite la relation e^2/h qui a la dimension d'une vitesse, vitesse que l'on peut introduire dans les raisonnements précédents soit

$$(2.113) \quad \begin{aligned} t_0 &= (Gh^6/e^{10})^{1/2} \text{ soit } 2.940 \cdot 10^{-36} \text{ s} \\ l_0 &= (Gh^4/e^6)^{1/2} \text{ soit } 1.023 \cdot 10^{-28} \text{ cm} \\ m_0 &= (e^2/G)^{1/2} \text{ soit } 1.859 \cdot 10^{-6} \text{ g} \end{aligned}$$

Il en résulte avec ses données naturelles

$$(2.114) \quad \tau_0 = t_0 = (Gh^6/e^{10})^{1/2} \text{ soit } 2.940 \cdot 10^{-36} \text{ s}$$

$$(2.115) \quad \mathfrak{S}_0 = s \cdot 2\pi/\tau_0 \text{ soit } 2.137 \cdot 10^{36} \text{ s}^{-1}$$

La valeur minimale de la période $\delta\tau$ et la valeur maximum de la fréquence w , pour l'oscillation des particules élémentaires, implique $\delta\tau \geq \tau_0$ et $\omega \leq 1/\tau_0$ (2.116). En considérant la relation de Planck : $\varepsilon \cdot \delta\tau \geq h/2$ pour des particules d'énergie : $\varepsilon = h\omega = h/\delta\tau = mc^2$. Ces relations conduisent à limiter l'énergie et les masses des particules élémentaires.

$$(2.117) \quad \varepsilon \leq h/2\tau_0 = [(e^{10}/Gh^4)^{1/2}] / 2 \text{ soit } 7.034 \cdot 10^{20} \text{ eV}$$

$$(2.118) \quad m \leq h/c^2\tau_0 = (e^{10}/Gc^4h^4)^{1/2} \text{ soit } 2.508 \cdot 10^{-12} \text{ g}$$

Selon la mécanique quantique on a $\varepsilon = mu^2/2$ ou u est la vitesse de groupe du paquet d'ondes. Il s'en suit que $\varepsilon = mu^2/2 \leq h/2\tau_0$ qui implique la relation d'ordre prenant en compte la vitesse de la lumière : $u^2 \leq c^2$. Ainsi peut-on en conclure que la limitation de l'énergie des particules élémentaires et la limitation des vitesses des particules peuvent directement être corrélées à l'existence d'une discrétisation de la temporalité physique $\tau_0 > 0$.

³ En 1966 Georgi Zatspein, Vadim Kuz'min et Kenneth Grayzen ont suggéré qu'il existe une limite maximum à l'énergie des particules cosmiques, limite due à leur interaction avec le fond de microondes (). Ils ont estimé la valeur à $6 \cdot 10^{16}$ eV . la distance minimale pour atteindre cette limite peut être estimée à 50Mpc et en tout état de cause des rayons cosmiques caractérisés par des énergies de l'ordre de $6 \cdot 10^{19}$ eV ne peuvent être observés. Cependant avec un détecteur de 10^3 km², on a pu mesurer des énergies voisine de 10^{20} eV.

⁴ Moshe ben Maimon a tenté de donner une telle estimation au 12^{ème} siècle en divisant l'heure en 60 parties, et par similarité en répétant l'opération 10 fois il aboutit à $6 \cdot 10^{-15}$ seconde.

La superposition des caractéristiques de continuité et de discrétisation liées au temps physique hélicoïdal, est associée à l'usage de variables physiques complexes, autrement dit de fonctions harmoniques, donc de fonctions « spectrales ». Le terme dualisme est utilisé par de nombreux philosophes et des scientifiques (particules/antiparticules ; Bosons/Fermions ; Ondes/corpuscules ; spin up and down, ; etc) souvent dans des contextes très différents voire opposés. En tout cas on est conduit à penser que les sciences naturelles ont besoin d'entités duales pour assurer la complétion de leur analyse, (polarisation opposée, anti entités etc) pour être physiquement significatives. Il ne s'agit pas d'être systématique mais il est utile de comprendre que l'usage de la dualité et son statut mathématique tient à la dualité entre continuité et discrétisation. En effet, en réduisant la problématique à un changement de signe, il est facile de comprendre que le choix visant un tel basculement ne peut opérer que de manière discrète.

3. Dualité de la Spatialité : Espace et Anti-Espace

3.1. Les fondements granulaires de la pensée scientifique

Les hypothèses sur lesquels reposent la science sont de trois types

- ✓ *la matière est infiniment et mécaniquement divisible*
- ✓ *la matière à un fondement atomique*
- ✓ *la matière est un produit de l'esprit et sa structure expérimentale est différente de son être propre.*

La science ne considérant pas l'être l'item 3 sort du champ scientifique même si la mécanique quantique pose implicitement la problématique de l'être quantique en lien avec l'esprit et l'expérience de l'observateur. En introduisant le principe de divisibilité, l'item 1 interroge explicitement les problématiques d'échelles d'expérimentation en introduisant implicitement la question d'éventuelles l'autosimilarités en loi. Longtemps les spermatozoïdes ont été pensés comme des hommes à petite échelle en pensant la gestation et la croissance comme on pourrait le faire de poupées russes. Le fait que le monde microphysique dut être pensé selon des lois fondamentalement différentes des lois du microscope, est une idée moderne exigeant l'usage d'êtres mathématiques hautement abstraits et sans lien direct avec les planètes ou des boules de billard. Dans la direction cosmologique il est impossible d'imaginer à notre échelle la distance qui sépare des galaxies entre elles ou la taille d'un trou noir « pesant » de dizaine de milliard de masses solaires. Ces difficultés nous conduisent à penser que les changements d'échelles sont presque sûrement associés à des changements de lois de comportement. Si l'on se place dans cette hypothèse, l'idée selon laquelle il y aurait une structure ultime, atome non divisible, ne tient évidemment pas. Il faut admettre que le bloc élémentaire est lui-même une structure. Le même problème se pose pour définir par exemple la notion de vide. Si la lumière voyage dans le vide avec une vitesse finie le vide doit disposer d'une construction interne qui détermine cette vitesse ; la notion de vide ne peut pas être une notion absolue. Ainsi, peut-on penser que les changements d'échelles opèrent avec des changements de lois, la question se pose de savoir si ces changements répondent eux-mêmes à des lois. Ces changements peuvent eux-mêmes être des poupées russes : la mécanique quantique ne serait pas apparue sans qu'au préalable soit établie la théorie de la lumière et l'électrodynamique quantique ne pouvait être pensée sans qu'au préalable existe la mécanique classique. La question majeure de toute démarche scientifique est en pratique : que peut-on et comment mener une extrapolation. De multiples hypothèses doivent alors être traitées.

L'hypothèse notée 4 est la suivante : partant d'une petite échelle donnée, la propriété de la matière est modifiée en sorte que la petite particule devienne la plus grande d'un autre ensemble.

L'idée qui peut sembler paradoxale, consiste à considérer les propriétés de la petite particule comme la superposition (OU, \cap , \otimes) d'ensembles plus grands. L'idée de primarité des particules disparaît pour être remplacée par l'idée de composition.

A ce stade, de même qu'il a pu être conçu des espaces de dimensions fractionnaires et une physique sur ces espaces, nous nous proposons d'introduire le concept d'espace caractérisé non, comme à l'ordinaire, par un nombre de dimensions positif mais par une valeur négative ou nulle. Nous avons appelé « *anti espace* » de telles entités. L'espace de dimension zéro est en un certain sens dual puisqu'il appartient à l'espace standard et à l'anti espace. Comme composante de l'espace normal (il s'agit d'un point de l'anti espace) il en étend les propriétés. Ce faisant, cet espace présente des traits dont les caractéristiques le met en rapport avec la microphysique selon l'hypothèse 4. Par contre, l'idée d'espace de dimension négative est, à ce stade hautement spéculatif en particulier parce que l'analyse n'ouvre pas de voies à une expérimentation. Plus délicat est la tentative de donner des images d'objets pour lesquels nous n'avons aucun langage. La théorie des nombres (entier, négatif, rationnel, irrationnel, p-adique, réel, transcendant, complexe standard etc) est là pour nous montrer que la pensée est une construction bâtie à partir d'un langage qui est lui-même une construction répondant à une histoire. Au-delà on ne peut penser la mécanique quantique que dans le cadre du mode d'existence des nombres complexes mais Hermite avait conçu les propriétés de ses matrices bien avant la naissance de la mécanique quantique. De même, il n'a pas fallu attendre la conception des nombres non standard pour inventer le calcul différentiel y compris par extension fractionnaire (Newton, Leibniz). L'être approximatif, l'esquisse précède souvent, contre l'idéologie scientifique, l'assurance théorique. Les opérateurs fractionnaires et les transformations de Fourier sont là pour prouver l'expressivité de telles « caricatures ».

Dans le cas d'anti espace ; celui qui nous occupe, espace de dimensions négatives, nous nous proposons de nous appuyer sur des paires complémentaires de séries divergentes (DDS). Nous donnerons juste les informations nécessaires à notre propos en revoyant le lecteur au livre spécialisée (Hardy 12, +15 16).

3.2. Le rôle des séries divergentes

Au plan philosophique DS peut être considérée comme un objet mathématique en soi caractérisant des situations particulières des sciences naturelles faisant intervenir l'infini. On doit considérer de telles situations dans le cadre de réalités possibles et non comme des situations pathologiques dans des univers empiriques finis.

Nous ne chercherons pas à entrer dans le détail théorique des analyses, mais à montrer combien une telle approche peut être utile. La question majeure qui se pose à leur propos : quel type de somme doit on attribuer aux expressions divergentes. On peut se référer aux réflexions d'Euler. En substance : « toute la difficulté vient du sens à donner au mot somme. Si par somme on entend celle d'une série, il ne fait aucun doute que cette idée ne peut être affectée qu'à une série convergente pour laquelle les termes successifs sont décroissants. Il faut admettre que pour les séries dans lesquelles les termes augmentent ne peuvent être que divergentes si le terme somme signifie la sommation. On peut sortir de cette difficulté et contradiction apparente, en attribuant au mot somme un sens légèrement différent. La somme d'une série infinie est une expression finie dont l'expansion sous forme de série est semblable à la série infinie. Dans le cas de séries convergente la notion de somme retrouve sa signification habituelle. Au titre de la divergence cette somme n'a pas de signification standard mais la nouvelle définition préserve le bénéfice de la divergence, comme qualité non standard ». Pour éviter toute confusion nous utiliserons le terme de quasi somme. A ce stade la question qui se pose est la suivante : quel type de quasi somme doit-on attribuer à une DS quand la formulation finie nous est inconnue ? Si l'on considère une série numérique il existe une procédure spéciale : la sommation de Césaro (voir ci-dessous). Cette technique permet de définir assez souvent la quasi somme.

3.3. Séries divergentes unimodales

Considérons les fonctions suivantes :

$$(3.1) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x) ;$$

$$(3.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = 1/(1-x)^2$$

$$(3.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! x^k = \int_0^{\infty} \exp(-x) dt / (1 + xt).$$

Les sommations d'Euler pour DS consistent à utiliser l'égalité (3.1) et (3.3) dans le cas où la série diverge. Par exemple (3.1) avec $x=-1$, on obtient un résultat (3.4) qui avait intrigué Leibniz $S=1-1+1-1+\dots=1/2$. On notera que (3.4) fut le premier exemple démontrant que le principe du tiers exclu peut être invalide pour les ensembles infinis. On notera également que la quasi somme (3.4) répond à l'équation fonctionnelle $S=1-S$. On en trouvera de nombreux exemple dans les problématiques physique du projet Lila Entropie.

Considérons maintenant $x=-1$ dans (3.2) Il vient (3.5) : $S = 1-2+3-4+\dots=1/4$. On trouve ici un premier fait remarquable associé aux DS. *En dépit du fait que les quasi somme mettent en jeu des nombre entiers $n \in \mathbb{N}$, le résultat peut être une fraction $S \in \mathbb{Q}$.* Ainsi la série (3.3) diverge pour tout $x \neq 0$ mais pour $x=1$, $S=0 !-1 !+2 !-3 !+\dots = \int_0^{\infty} \exp(-1) dt / (1 + t) = 0,59635\dots$ Par contre $x=2$ dans (3.1) donne (3.6) $S= -1$. Cette quasi somme répond aussi à l'équation fonctionnelle $S=1+2S$. Nous trouvons ici un second fait remarquable à propos de DS (Note 2) : *la quasi somme de DS en nombre entiers peut conduire à un résultat négatif.* Ce résultat paradoxal pourra être utilisé pour discuter les propriétés singulières des figures géométriques dans les anti-espace. Pour $x=1$ dans (3.1) conduit à $S=\infty$ Quarante années après les travaux d'Euler sur DS furent considéré les séries à double paramétrisation par exemple (3.8) avec $m < n$

$$(1+x+x^2+\dots+x^{m-1}) / (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = (1-x^m) / (1-x^n) = 1-x^m+x^n-x^{m+n}+x^{2n}-\dots$$

Avec $x=1$ il vient $S=1-1+1-1+\dots=m/n$ résultat qui contredit (3.4). Ce paradoxe a été résolu par Lagrange. La série (3.8) vue comme série de puissance introduit des omissions. Par exemple pour $m=2$ et $n=3$, $S=1+0.x+1.x^2+1x^3-0x^4-1x^5+\dots$ Pour $x=1$ Euler attribut la valeur $S+2/3$ à la série $S=1+0-1-0-1+\dots$ mais pas à la série (3.4). On en déduit (note 3) que *DS n'est pas seulement décrite par la séquence de ses termes mais aussi par leur position dans la suite.* Cette caractéristique joue un rôle central dans la définition des anti espaces. *Le même phénomène est connu (Note 4) pour des séries non absolument convergentes.*

Une méthode importante pour traiter des DS est la méthode de Césaro qui concerne aussi les séries lentement convergentes. Considérons $C(1)$ la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ la limite de la séquence si elle existe est telle que $S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k$ avec $\sigma_k = (S_0 + S_1 + \dots + S_k) / (1+k)$, avec les $S_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$ comme sommes partielles. La procédure de Césaro peut être appliquée plusieurs fois par exemple m fois donnant $C(m)$ avec application à des expressions particulières de σ_k . A titre d'exemple considérons la quasi somme (3.4) . Pour k pair $k=2m$ pour k impair $k=2m+1$. On tire de (3.9) : $S_{2m}=1$, $S_{2m+1}=0$. Il en résulte que $\sigma_{2m} = m/(1+2m)$ et $\sigma_{2m+1} = m/2(1+m)$, soit encore $S_{m \rightarrow \infty} = 1/2$. Par contre la série (3.6) ne peut pas être sommée par la procédure de Césaro, car $S_k = 2^{k-1} - 1$, et $\sigma_k = (2^{k+2} - k - 3) / (k+1)$ dernier terme qui n'a pas de limite lorsque k tend vers l'infini. La répétition de la méthode de Césaro ne modifie pas ce résultat. Comme la méthode d'Euler donne un résultat différent on confirme que *différentes méthodes de sommation peuvent conduire à différents résultats.* Cette caractéristique aura des conséquences sur l'usage physique qui sera fait de l'anti espace.

On peut noter ici une certaine insuffisance des approches proposées. Il semble que la grandeur de la quasi somme obtenue par différentes méthodes de sommation ne peut être qu'une grandeur finie correspondant au nombre de solutions de l'équation fonctionnelle définissant la quasi somme d'une série. Par exemple dans la série (3.6) l'équation fonctionnelle $S=1+2S$. Une solution de cette équation (Euler) est $S=-1$ mais une autre solution est donnée par $S=\infty$.

Par ailleurs nous pouvons considérer deux règles qui fonctionnent systématiquement par les DS

Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=S$ alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} const a_k=const. S$

Si on dispose de deux série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=S$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k=T$ alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k=S+T$

Les séries de puissance peuvent être différenciées et intégrées terme à terme sous réserve que l'expression générant la série reste finie. L'équation (3.2) est la dérivée première de (3.1). la poursuite de la dérivation donne de nouvelles séries. La séquence d'intégration de (3.1) conduit à un ensemble de nouvelles séries divergentes. Par exemple : (i) $1+(1/2)+(1/3)...\infty$; (ii) $1+2+3+...\infty$; (iii) $1.2+2.3+4.3+4.5+ \dots=\infty$. Dans ce contexte on peut observer que la série (3.7) n'est en rien unique. En pratique la manipulation de DS est naturellement source d'erreur. Attendu ce qui a été dit précédemment toute réorganisation des termes peut conduire à une erreur par exemple $x+(2x^2-x)+(3x^3-2x^2)+(4x^4-3x^3)+\dots=0$. Pour $x=1$ on trouve $S=0$ ce qui contredit (3.7). L'erreur vient de la redistribution de termes. Autre exemple important pour le projet Lîla Entropie qui met l'accent sur le rôle de la fonction zêta.

$$(3.12) \quad \zeta(s)=[1/\Gamma(s)]\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}dx}{\exp(x)-1} = 1+(1/2)^s+ (1/3)^s+ \dots$$

Si nous écrivons $\zeta(s)=0$ dans (3.12) nous obtenons $1+1+1+\dots=\zeta(0)=[-1/2]$.résultat qui contredit (3.7). L'erreur tient au fait que la série (3.12) est le ratio de deux séries divergentes $I(s)=\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}dx}{\exp(x)-1}$ et $\Gamma(s)$ pour l'intégrales avec $s=0$.

Il y a par ailleurs des difficultés spécifiques dans l'interprétation des quasi-sommes contenant des expansions faisant intervenir des fonctions multivaluées. Par exemple pour $|x|<1$ on a :

$$(3.13) \quad S=x+(x^3/3)+(x^5/5) \dots= (1/2) \ln(1+x)/(1-x).$$

Pour $x=2$ $S(2)= (1/2) [\ln(3) -\ln(-1)]= (1/2) [\ln(3)+i\pi(2k+1)]$ avec $\pm k=0,1,2,\dots$

En dépit du fait que cette quasi somme est représentée par des nombres complexes, le résultat est ambiguë ; la méthode Césaro donne $S(2)=\infty$.

Cette liste d'erreurs possibles est évidemment non exhaustive. On peut utiliser les méthodes d'Euler pour les séries de puissances et la méthode de Césaro aussi bien que d'autres procédures (2^{ème} méthode d'Euler, celle d'Abel, de Riemann de Borelli [HAR49]. Il conviendra de se méfier des opérations telles que la multiplication et division de séries qui peuvent conduire à des erreurs.

3.4. Séries divergentes Duales (DDS)

Nous aborderons ici les séries divergentes selon deux voies qui constituent pour nous la base de la théorie des espaces de dimensions zéro et négative. Pour commencer considérons la série (3.14) telle que $S=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ après une transformation nous pouvons écrire :

$$(3.15) \quad S=[\dots+(1/x^3)+(1/x^2)+(1/x)]+[1+x+x^2+x^3+\dots]=(1/x)[1-(1/x)]+1/(1-x)=0$$

Un résultat analogue peut être obtenu après une partition de (3.14) entre 2 parties ou plus. On peut penser que la quasi-somme (3.14) est aussi égale à zéro. Ce résultat est cohérent avec la formulation d'Euler assurant que la somme de toute progression géométrique étendue dans les deux directions est toujours nulle. L'usage de cette règle (**ref 14**) avec $x=1$ dans la relation (3.15) donne l'étonnant résultat sur la DDS (3.16) : $\dots+1+1+1+1+\dots=S=0$ lorsque l'on sait que la DS qui lui est duale (3.17) donne $S=-\infty$.

Il est aujourd'hui difficile de savoir qui fut l'auteur de l'assertion remarquable selon laquelle en fait « les équations pensent à nous ». Peut-être, par exemple l'équation (3.16) reflète-t-elle certains rapports

secrets qui nous relie à notre monde. Dans la première moitié du 19^{ème} siècle Grégory proposa la formulation suivante généralisant la relation (3.15) (**Ref12**)

$$(3.17) \quad S_{17} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x+k) = 0 \quad ; \quad (3.18) \quad S_{18} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \varphi(x+k) = 0$$

$$(3.19) \quad S_{19} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(-1)^{k-1}/k] \varphi(x+k) - \varphi(x-k) \right] = \varphi'(x)$$

Ces formules sont valides pour différents types de fonctions « φ ». Par exemple à partir de (3.17) avec $\varphi=1$ (3.16) et (3.18) conduisent à (3.20) : $\dots -1+1-1+1-\dots = S=0$. Cette quasi-somme n'est rien moins que (3.15) avec $x=-1$. On verra ultérieurement que dans certaines conditions il y a une formulation de Grégory qui implique une dépendance analytique graduée de a_k en sorte que : (3.21) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. A titre d'exemple quand (3.17) et (3.21) on peut démontrer à propos de la quasi somme de la série d'Heaviside (3.22) : $S=S(x,p) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)}$ que si $p \in \mathbb{N}$ et $(p+k+1) \leq 0$ alors certains termes disparaissent et (3.23) $S(x,p) = \exp(x)$. Dans tous les autres cas la série diverge pour toutes les valeurs de « x » toutefois puisque la différentiation fonctionne, il semble qu'il soit possible de conjecturer que la série possède une quasi-somme de type (3.23). En vérité [HAR49] il est prouvé que pour toute valeur p -fractionnaire la série (3.22) converge asymptotiquement vers (3.23). Il est possible que l'anomalie ainsi révélée tient au fait que les termes de la série (3.22) évoluent bien plus vite que ceux de la série (3.14). Malheureusement nos connaissances ne permettent pas de définir de manière assurée les limites de l'application des formules (3.17), (3.18) et (3.21). Toutefois l'expérience semble montrer que les relations attachées aux DDS sont valides quand les termes successifs changent lentement et en particulier lorsqu'on a affaire à des lois de puissance. Ce fait sera utilisé ultérieurement pour rejeter certaines assertions. On notera que dans le cas de série en « bi face » convergentes la règle (3.21) est invalide. Par exemple $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \pi^2/4$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \pi^4/48$.

3.5. Somme d'un nombre négatif de termes de séries

Cerner le concept d'anti espace exige de penser un nouvel outil mathématique permettant d'estimer la quasi-somme de termes négatifs dans des séries infinies. On notera qu'Euler, réfléchit par exemple à la signification du concept de somme fractionnaire $S_{n/m}$ de termes, concept que nous nous proposons de généraliser aux sommes S_{-n} d'entités négatives.

$$(3.24) \quad S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1/4k^2-1) = (1/3)+(1/15)+(1/35)+\dots+(1/[4n^2-1])$$

On valide pour cette somme l'expression algébrique (3.25) selon laquelle $S_n=n/(2n+1)$. Il est alors naturel de pouvoir considérer S_0 et S_{-n} directement à partir de (3.25), soit

$$(3.26) \quad S_0=0 ; S_{-1}=1 ; S_{-2}=2/3 ; S_{-3}=3/5 ; \dots$$

On constate que toute la difficulté va naître lorsque la somme n'est pas explicite. Partons de la formulation (3.21). Nous pouvons écrire une expression de type DDS (3.24) sous la forme

$$(3.27) \quad S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1/4k^2-1) = [\dots+(1/15)+1/3]+[-1]+[(1/3)+(1/5)+\dots] = 0$$

Puisque les deux demi partie de la série convergent, on peut vérifier que

$S = -1 + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = -1 + 2 \cdot (1/2) = 0$. Observons que la DDS notée (3.27) a une somme égale à zéro qui est exactement la somme S_0 de la séquence (3.26). On verra ci-dessous que cette correspondance n'est pas sans signification. Si dans la série (3.27) on néglige de terme de valeur zéro, nous obtenons une somme correspondant à (3.26) soit

$$S_{-1} = S - (-1) = [\dots + (1/15) + 1/3] + 0 + [(1/3) + (1/5) + \dots] = 1$$

Si on néglige les termes en $k=0$ et $k=-1$, nous obtenons également une correspondance avec (3.26)

$$S_{-2} = S - (-1) - (1/3) = [\dots + (1/35) + 1/15] + 0 + 0 + [(1/3) + (1/5) + \dots] = 2/3$$

Poursuivant cette démarche inductive, on démontre que cette procédure donne la coïncidence avec (3.26). On peut donc formuler la règle suivante : *La somme de la série ayant zéros nombre de terme (dans le sens indiqué ci-dessus S_0) est analogue à la somme de $-\infty$ à $+\infty$ des « a_k ». La somme pour la valeur négative du nombre de termes $-m$ est égale à la série bi face dans laquelle les termes $:0, -1, -2, \dots, -(m-1)$ sont remplacés par zéros.*

Les conditions d'application de cette règle ne sont pas encore établies précisément. Cependant notre expérience de telles séries suggère que l'application de cette règle est la même que celle appliquée pour (3.21). Les termes des séries doivent évoluer plus lentement que pour les séries de puissances. Evidemment, le terme a_k , doit être une fonction analytique du facteur k , et ne doit pas devenir infini pour des valeurs entières de $\pm k$. Cette nouvelle règle peut être interprétée de la manière suivante pour la notion de séries à zéro et négatifs termes :

La série qui est déterminée par 0-termes, est à certains égards, analogue à la DDS de type (3.21). La série déterminée par le (-1)-termes est analogue à la DDS de type (3.21) pour lesquels on élimine le 0-terme. Par induction on montre que la série déterminée par le (-m)-termes est analogue à la DDS de type (3.21) pour lesquels on annule les $0, -1, -2, \dots, -(m-1)$ -termes.

Cette interprétation permet d'utiliser les notions à priori paradoxales des (0)-séries et (négative) séries d'objets (par exemple des axes de coordonnées) conduisant à une représentation utilisant une DDS structurellement affectées par des gaps, ici des zéros. Cette perforation des objets de la classe des (-m)-séries, font naturellement penser à la mécanique quantique et tout particulièrement à génération d'anti-matière (par exemple positron) correspondant au retrait de matière (par exemple d'un électron dans un bain d'électrons) ([DIR58] p 378). Notre capacité d'utilisation de somme de non positive séries n'est justifiable que dans le cas où on use de DDS absolument convergente et de somme nulle (Exemple 3.24).

Considérons la série dans laquelle le terme général peut être représenté comme une différence infinie définie pour tout $\pm k \in \mathbb{N}$ avec $b_k \rightarrow 0$ pour $|k| \rightarrow \infty$ plus rapidement que $|k|^\epsilon \rightarrow \infty$ (Par exemple dans (3.24) $b_k = -1/[2(2k-1)]$)

$$(3.28) \quad S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_k) = \dots + (b_{-2} - b_{-3}) + (b_{-1} - b_{-2}) + (b_0 - b_{-1}) + (b_1 - b_0) + \dots = 0$$

Partant formellement nous avons (3.29) $S_0 = b_1 - b_1 = 0$, $S_{-1} = b_0 - b_1$, $S_{-2} = b_{-1} - b_1$, ... Par ailleurs attendu les propositions qui précèdent

$$(3.30) \quad S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_k) = \dots + (b_{-2} - b_{-3}) + (b_{-1} - b_{-3}) + (b_0 - b_{-1}) + (b_1 - b_0) + \dots = 0$$

Partant il s'en suit que $S_0 = 0$. Par soustraction de cette somme le terme $(b_1 - b_0)$, il vient

$S_{-1} = (b_0 - b_1)$; puis en soustrayant les deux termes $(b_1 - b_0) + (b_0 - b_1)$ on obtient

$S_{-2} = (b_{-1} - b_1)$ et ainsi de suite ce qui donne le même résultat que (3.29). Vérifions les assertions précédentes avec des séries infinie. Par exemple

$$(3.31) \quad S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (k^2) = n(n+1)(2n+1)/6$$

Partant nous obtenons (3.32) : $S_0 = 0$; $S_{-1} = 0$; $S_{-2} = -1$; $S_{-3} = -5$; $S_{-4} = -14$... et la formule (3.21) donne (3.33) $S_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (k^2) = \dots + 9 + 4 + \dots + 0 + 1 + 4 + 9 + \dots$

En soustrayant zéro terme à $S_0=S=0$ on trouve $S_{-1}=0$; par induction en soustrayant les sommes de termes avec les nombres de termes 0, -1,-2,... on trouve exactement les résultats pour (3.32) qui dérivent de l'usage de la somme finie (3.31). La série (3.33) est symétrique eu égard à l'inversion $k \rightarrow -k$. Ainsi on doit vérifier pour la formulation « anti symétrique »

$$(3.34) \quad S_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (2k+1) = n^2+2n$$

Formellement on peut écrire (3.35) $S_0=0$; $S_{-1}=-1$; $S_{-2}=0$; $S_{-3}=+3$; $S_{-4}=+8...$ Utilisons maintenant la série qui correspond à la somme (3.34)

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} (2k + 1) = \dots -5 -3 -1 +1 +3 +5 +7 + \dots = 0$$

En excluant en conséquence les termes $k=0,-1,-2 \dots$ on trouve précisément les valeurs (3.35). Le lecteur pourra vérifier la pertinence de la règle proposée pour la sommation non positive dans une séries donnant lieu à une expression algébrique pour les sommes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n n(n+1)/2$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k + 1)^2 = (-1)^n + (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^4 = (-1)^n n(n^3+2n^2-1)/2$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k - 1)x = [1 - \cos x - \cos nx + \cos((n-1)x)]/2(1 - \cos x)$$

Cependant pour la série suivante la méthode proposée est invalidée comme nous pouvons le constater par une vérification directe

$$S_n = \sum_{k=1}^n 1/(k + 1)(k + 2) = (1/2) - 1/(n+2)$$

La raison de cette inadaptation est due au fait que pour $k=-1$ et $k=-2$ les valeurs de la série $S_n = \sum_{-\infty}^{\infty} 1/(k + 1)(k + 2)$ sont infinies. On trouve la même difficulté pour la somme $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k(k + 1)(k + 2) = (1/4) - 1/2(n+1)(n+2)$.

Note N°9 : La méthode proposée peut être utilisée pour trouver la partie finie de l'intégrale divergente [HAR49]. Considérons la formule 8 de la référence (page 604)

$$(3.36) \quad S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k (x^{2k+1}) \cdot (2k + 1)^{-1} = \arctg(x) - x + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} dt$$

En prenant pour la partie droite $n=0$ on obtient $S_0=0$. Pour $n=-1$ on trouve $S_{-1}=-x$. Cependant dans le cas $n=-2$ l'intégrale est divergente. En calculant les limites pour $[\epsilon, x]$ on obtient

$$(3.37) \quad S_{-2} = (1/\epsilon) - (1/x) - x + O(\epsilon)$$

Par ailleurs en considérant la DDS on trouve (3.38) : $S = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k (x^{2k+1}) \cdot (2k + 1)^{-1} = 0$ on trouve $S_0=0$ et donc en soustrayant les termes indexés par $k=0,-1, \dots$ on obtient $S_{-1}=-x$,

$S_{-2} = -(1/x) - x$ qui est l'expression correcte pour la formule (3.37).

3.6. Axiomatique relatives aux séries bi face DDS

Nous avons analysé dans le paragraphe précédent l'arithmétique singulière aux séries à nombres d'entités nulle ou négative. Il est cependant possible de construire une arithmétique axiomatique, sans justification préalable. Nous nous proposons d'utiliser les seuls axiomes suivants (3.39):

1. $S = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k = 0$
2. Si $S_n = \sum_1^n a_k$ et $S = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k$ alors $S_0 = S = 0$
3. Si $m \geq 1$ $S_n = \sum_1^n a_k$ et $S_{-m} = \sum_1^{-m} a_k = S - \sum_0^{-m+1} a_k = -\sum_0^{-m+1} a_k$
4. Si $S = \sum_k a_k$ et $T = \sum_k b_k$ alors $S+T = S = \sum_k (a_k + b_k)$
5. Si $S = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k$ alors $\sum_{-\infty}^{m-1} a_k + (a_m + b) + \sum_{m+1}^{\infty} a_k = S + b = b$
6. Si (3.40) $S = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)$, alors $\frac{d}{dx} S = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$

On observera que le symbole \sum_k est utilisé pour tous les types de sommes et donc pas seulement pour les DDS. La règle de multiplication par une constante est alors (3.40) la conséquence du 4^{ème} axiome : Si $S = \sum_k a_k$ alors : $const \sum_k a_k = \sum_k const. a_k$.

Le premier axiome introduit une signification du zéro, ou zéro-signifiant, qui est représenté par une double série qui peut être soit convergente soit divergente. Le deuxième axiome affirme que la somme d'une série finie avec zéro-terme est identique à un zéro-signifiant. Le troisième axiome affirme qu'une somme finie de termes négatifs peut être représentée par une série de zéro-signifiants qui élimine les termes qui lui correspondent. Le quatrième axiome est trivial d'où il s'en suit l'intégration terme à terme. L'axiome cinq est particulièrement important parce qu'il justifie la possibilité d'ajouter une expression finie à une série analytique. Le sixième axiome justifie la différentiation terme à terme. On ne connaît pas à ce jour les conditions suffisantes d'application des axiomes (3.39) mais nous pouvons toutefois en évoquer quelques-unes:

Le terme a_k peut être une fonction analytique du nombre k . Toutefois la dépendance de a_k vis-à-vis de k ne peut pas être trop forte et en particulier a_k ne doit pas devenir infini pour des valeurs entières de $\pm k$.

A quel niveau doit se placer la dépendance nous ne le savons pas précisément. Les exemples semblent montrer que les axiomes sont tous pertinents pour les fonctions de puissance alors qu'ils ne le sont que partiellement, pour les fonctions exponentielles.

Note 10 : examinons l'axiome 5. Si $\dots+1+1+1+1+1+1\dots=0$ alors $\dots+1+1+2+1+1\dots=1$. Cet exemple met en évidence que les DDS n'ont pas toutes des zéros sommes, si l'on excepte les DDS qui satisfont les conditions analytiques terme à terme.

Note 11 : les DDS dont les différentes parties répondent à différentes formulations, ne satisfont pas à l'axiome 1. $(\dots 1+1+1+\dots)+(1+2+4+8+\dots) \neq 0$

Note 12 : revenons ici sur un point important. Considérons (3.21) et ses conséquences (3.41) :

$$\dots a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 0$$

$$\dots a_{-2} + a_{-1} + 0 + a_1 + a_2 + \dots = -a_0$$

$$\dots a_{-2} + 0 + 0 + a_1 + a_2 + \dots = -a_{-1} - a_0 \quad \text{etc ...}$$

Attendu le contenu du paragraphe 3.1.1 la préservation des positions (localisations) pour les termes supprimés pour les zéros séries est absolument nécessaire dans les séries divergentes.

L'interprétation empirique que l'on peut suggérer pour les zéros et négatives séries peut être la suivante : la zéro-quantité des objets n'est autre que la « DDS d'infinies quantités » impossible à observer dans certaines opérations de décomptage. Un nombre négatif d'objets peut être modélisé par la privation (le retrait) de cette « DDS infinie quantité » d'un nombre fini d'objets occupant des positions précises et non interchangeables.

Note 13 : Différentiation et Intégration : considérons la série (3.15)

$$(3.42) \quad S = [\dots + (1/x^3) + (1/x^2) + (1/x)] + [1 + x + x^2 + x^3 + \dots]$$

La différentiation opère sans difficulté

$$(3.43) \quad \frac{d}{dx} S = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{[1-(1/x)]^2} + 0 + \frac{1}{[1-x]^2} = 0$$

Observons que la série (3.43) appartient à la classe de (3.42) ses termes peuvent être représentés par la même formulation qui répond à la relation $a_k = kx^{k-1}$. On verra dans la référence principale l'expression analytique (3.44) de l'intégration $\int_a^x S dx = 0$. On observera que (3.44) n'appartient pas à la classe des (3.42) et (3.43). Faute de représentation analytique correcte la préservation de la relation (3.21) n'est pas valide. Il s'en suit que les opérations d'intégrations exigent des précautions qui n'existent pas pour les dérivations habituelles. On observera que pour les séries convergentes c'est l'inverse parce que l'intégration est plus sûre que la dérivation.

Note 14 : illustrons encore les propriétés des DS et DDS quant à la dépendance positionnelle selon l'ordre des termes

$$S_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) = 0 \text{ et } S_2 = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos(kx) = 2\pi\delta(x-2\pi s) \text{ avec } \pm s \in \mathbb{Z}$$

La première somme est nulle conformément à (3.21). La somme de la seconde série qui représente la décomposition de Fourier de la fonction de Dirac est nulle partout excepté pour les points de coordonnées entières $x=2\pi s$ où $S_2 = \infty$; ainsi $S_1 \neq S_2$. Cette distinction tient à la différence entre $\dots + 1 + 1 + 1 + \dots = 0$ et $2(1 + 1 + 1 + \dots) = \infty$.

Généralisation :

Les résultats ci-dessus peuvent facilement être étendus dans de multiples séries type :

.....
...+1+1+1+1+1+...	...+1+1+1+1+1+...
...+1+1+1+1+1+...	...+1+1+1+1+1+...
...+1+1+1+1+1+... = 0	...+1+1+0+1+1+... = -1
...+1+1+1+1+1+...	...+1+1+1+1+1+...
...+1+1+1+1+1+...	...+1+1+1+1+1+...
.....

Distinction valide en colonnes ou en diagonales tout aussi bien.

Les axiomes (3.39) permettent d'établir certaines règles avec non plus des séries d'addition (DDS) mais des séries de produits (DDP) dans lesquels les produits finis n'ont pas de facteurs entiers. Comme le produit peut être converti additivement au moyen de la fonction logarithme il s'en suit que certaines règles retrouvent leur validité pour les DDP ; soit :

1. $P = \prod_{-\infty}^{\infty} a_k = 1$
2. Si $P_n = \prod_1^{\infty} a_k$ alors $P_0 = \prod_1^0 a_k = P = 1$
3. Si $m \geq 1$ $P_n = \prod_1^n a_k$ alors $P_{-m} = P / \prod_0^{-m+1} a_k = 1 / \prod_0^{-m+1} a_k$
4. Si $P = \prod_k a_k$ et $Q = \prod_k b_k$ alors $PQ = \prod_k a_k b_k$

Le symbole $\prod_k(a_k)$ représente n'importe qu'elle produit incluant les produits finis. Et le produit se généralise sous la forme :

$$(3.45) \quad \text{si } P = \prod_{-\infty}^{\infty} a_k \text{ alors } \prod_{-\infty}^{-m+1} a_k (a_m \cdot \text{const}) \times \prod_{m+1}^{\infty} a_k = P \times \text{const} = \text{const}$$

Evidemment l'usage de la fonction logarithme garantit d'une certaine manière, la pertinence de ces axiomes néanmoins notre expérience plus faible des DDP par rapport aux DDS ne nous permet pas d'assurer qu'il n'existe pas de conditions restrictives à leurs applications.

3.7. La notion d'Anti Espace

Nous nous proposons d'introduire cette nouvelle notion à partir de de la notion de distance dans un espace ordinaire à partir de notions qui paraissent évidentes. Soit (3.6.1) $l^2 = \sum_1^n [(x_k)_1 - (x_k)_2]^2$

3.7.1. Zéro et négative métriques et espaces associés :

Conformément au concept de zéro terme dans les sommes finies il est naturel de concevoir des zéros espaces dont nous ne savons rien à ce stade mais dont nous supposons qu'ils répondent à des propriétés métriques de types (3.6.2) avec $l^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} [(x_k)_1 - (x_k)_2]^2$. On peut par exemple concevoir un espace vectoriel disposant d'une infinité d'axes dans un zéro-espace. Pour un (-1)-espace on pourrait écrire la métrique sous la forme d'une DDS caractérisée par un gap.

$$(3.6.3) \quad l^2 = \sum_{-\infty}^{-1} [(x_k)_1 - (x_k)_2]^2 + 0 + \sum_1^{\infty} [(x_k)_1 - (x_k)_2]^2$$

Que l'on généralise sous la forme :

$$(3.6.4) \quad l^2 = \sum_{-\infty}^{-m} [(x_k)_1 - (x_k)_2]^2 + \sum_0^{-m+1} 0 + \sum_1^{\infty} [(x_k)_1 - (x_k)_2]^2$$

3.7.2. Résolution des équations dans les anti espaces :

Le plus simple est de prendre l'exemple de l'équation de Laplace (3.6.5) $\Delta_n = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_k^2}$. Il vient alors pour le zéro (3.6.6) $\Delta_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k^2}$ et pour les valeurs négatives $m \leq -1$:

$$(3.6.7) \quad \Delta_0 = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k^2} + 0 + \Delta_0 = \sum_1^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k^2}$$

$$(3.6.8) \quad \Delta_0 = \sum_{-\infty}^{-m} \frac{\partial}{\partial x_k^2} + \sum_{-m+1}^0 0 + \sum_1^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k^2}$$

Il est connu qu'en symétrie sphérique à n-dimension l'équation de Laplace prend la forme

$$(3.6.9) \quad \Delta_n[\psi(r)] = 0 \text{ avec } r \in [0, \infty) \quad \text{et} \quad \Delta_n(r) = r^{1-n} \cdot \frac{d}{dr} r^{1-n}$$

Il existe des solutions non triviales pour ce type d'équations en particulier pour $n \in (-\infty, \infty)$ en particulier (3.6.10) pour $\psi = r^{2-n}$, avec $n \in (-\infty, 2], [2, \infty)$ et $y = \ln(r)$ pour $n=2$. Tentons de trouver la solution de (3.6.9) en coordonnées cartésienne pour la valeur non positive de n. pour le zéro-espace en conformément à l'équation (3.6.6) on a :

$$(3.6.11) \quad \left(\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{-2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{-1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots \right) \psi = 0$$

Attendu ce qui précède (3.6.12) : $\psi = r^2 = \dots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots$ Il résulte donc que (3.6.13)

$$\Delta_0 \psi = \dots + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \dots = 2(\dots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots) = 0$$

Pour un espace (-1) dimensionnel anti-espace l'équation de Laplace prend la forme

$$(3.6.14) \quad \left(\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{-2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{-1}^2} + 0 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots \right) \psi = 0$$

On peut alors vérifier que (3.6.10) est solution de

$$(3.6.15) : \psi = r^3 = (\dots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots)^{3/2}$$

Gardant en mémoire que (3.6.16) $\partial \psi / \partial x_k = 3r x_k$ et $\partial^2 \psi / \partial x_k^2 = (3r x_k^2 / r) + 3r$

il vient attendu ce qui précède que 3.6.15 est solution de $\Delta_{-1} \psi = 0$ car

$$(3.6.17) \quad \Delta_{-1} \psi = (3/r)(\dots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + 0 + x_1^2 + x_2^2 + \dots) + 3(\dots + r + r + 0 + r + r \dots) = (3/r)/r^2 - 3r = 0$$

Ainsi de manière générale pour toute valeur de dimension négative $n = -m$ ($m \geq 1$) avec m gaps on peut montrer de la même manière que ci-dessus que

$$(3.6.18) \quad \psi = r^{2+m} = (\dots + x_m^2 + \sum_{-m+1}^0 0 + x_1^2 + \dots)^{2+m/2}$$

Pour cette même condition $n = -m$ ($m \geq 0$) on démontre la consistance mutuelle de l'axiome (3.39) des expressions (3.6.2-4) et (3.6.6-8) qui rend pertinent le concept d'objets en nombre négatif et des géométries métriques négatives. Ainsi notre approche d'anti-espace semble résister au premier test effectué.

Note 6.1 : Il est évident que la solution triviale de (3.6.9) $\psi = \text{const}$ est également satisfaite pour tout $n \leq 0$ puisque l'opérateur (3.6.8) assure la transformation $\text{const} \rightarrow 0$. Voyons par exemple ce qu'il en est pour l'équation de Helmholtz

$$(3.6.19) \quad (\Delta_n - a^2) \psi(r) = 0 \quad \Delta_n = r^{1-n} [d/dr (r^{n-1} d/dr)] \quad \text{avec } r \in (0, \infty) \text{ et } a^2 = \text{const} \geq 0$$

Pour $n \in (-\infty, \infty)$ une des solutions de cette équation est (3.6.20) $\psi = r_\nu K_\nu(ar)$ avec $n = (2-n)/2$ ou $K_\nu(ar)$ est la fonction de Macdonald⁵.

Pour $n=0$ (3.6.20) entraîne (3.6.21) : $\psi = r K_1(ar)$ avec $r = (\dots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots)^{1/2}$

Comme $d/dz [K_0(z)] = -K_1(z)$ et $d/dz [K_1(z)] = -(1/z) K_1(z) - K_0(z)$ on obtient

$$(3.6.22) \quad d/dx_k [\psi] = -a K_0(ar) x_k \quad \text{et} \quad d^2/d^2 x_k [\psi] = -a K_0(ar) + (a^2/r) K_1(ar) x_k$$

soit en substituant (3.6.22) dans (3.6.19) en utilisant l'opérateur de Laplace de (3.6.11) on obtient

⁵ En mathématiques, les **polynômes de Macdonald** $P_\lambda(x; t, q)$ sont une famille de polynômes symétriques orthogonaux à plusieurs variables, introduite par Ian G. Macdonald en 1987. Il en a ensuite introduit une généralisation non symétrique en 1995. Macdonald associait à l'origine ses polynômes à des poids λ de systèmes de racines finis et utilisait une seule variable t , mais il s'est rendu compte plus tard qu'il était plus naturel de les associer à des systèmes de racines affines plutôt qu'à des systèmes de racines finis, ce qui permet de remplacer la variable t par plusieurs variables différentes $t = (t_1, \dots, t_k)$, une pour chacune des k orbites de racines dans le système de racines affines. Les polynômes de Macdonald sont des polynômes à n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$, où n est le rang du système de racines affines. Ils généralisent de nombreuses autres familles de polynômes orthogonaux, telles que les polynômes de Jack, les polynômes de Hall-Littlewood et les polynômes d'Askey-Wilson, qui eux-mêmes incluent la plupart des polynômes orthogonaux à une variable nommés comme cas particuliers. Les polynômes de Koornwinder sont des polynômes de Macdonald pour certains systèmes de racines non réduits. Ils ont des relations profondes avec les algèbres de Hecke affines et les schémas de Hilbert, qui ont été utilisés pour prouver plusieurs conjectures faites par Macdonald à leur sujet.

$$(3.6.23) (\Delta_n - a^2) \psi(r) = -a K_0(ar) (\dots + 1 + 1 + 1 + \dots) + (a^2/r) K_1(ar) [\dots + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + \dots] - (a^2/r) K_1(ar)$$

On observera que le premier terme s'évanouit car (3.6.16) et que les deux derniers termes s'annulent puisque la somme des carrés est le carré du rayon donc $(\Delta_n - a^2) \psi(r) = 0$

Pour $n = -1$ la solution de (3.6.20) est donnée par

$$(3.6.24) \psi(r) = (r^{3/2}) K_{1/2}(ar) \text{ avec } r = (\dots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + 0 + x_1^2 + x_2^2 + \dots)^{1/2}$$

La fonction de Macdonald caractérisée par des demi nombres entiers sont en pratique des fonctions élémentaires donc à un facteur constant près (3.6.24) devient

$$(3.6.25) \psi(r) = (1+ar) \exp(-ar) \quad \text{donc}$$

$$(3.6.26) d/dx_k [\psi] = -a^2 \exp(-ar) x_k \quad \text{et} \quad d^2/d^2x_k [\psi] = -a^2 \exp(-ar) + (a^3/r) \exp(-ar) x_k^2$$

En substituant (3.6.25) dans (3.6.19) dans laquelle l'opérateur de Laplace prend la forme de (3.6.14) on obtient au moyen de DDS déjà utilisée et avec les mêmes raisonnements que ci-dessus on confirme $(\Delta_{-1} - a^2) \psi(r) = 0$. On laissera au lecteur le soin de confirmer que pour $v = (2+m)/2$ avec $n = -m$ ($m \geq 1$) avec m gaps

$$(3.6.29) (\Delta_n - a^2) \psi(r) = 0 = m a r^{m/2} K_{m/2}(ar) + 2(a^2 m/2) (r^{(m+2)/2}/ar) K_{m/2}(ar)$$

On notera pour effectuer cette démonstration que (3.6.27) $K_{v-1}(z) - K_{v+1}(z) = -(2v/z) K_v(z)$

On observera qu'une fois de plus le concept d'ensemble d'objet en nombres négatifs et les géométries à métriques négatives confirment la solution de l'équation de Helmholtz. Les équations ci-dessus (3.6.9) et (3.6.19) sont généralement de même type et plus précisément la première des deux n'est qu'un cas particulier de la seconde. Il en résulte qu'il est intéressant d'examiner des équations caractérisées par des coefficients variables par exemple

$$(3.6.30) (\Delta_n - a^2 r^{-2}) \psi(r) = 0 \quad \Delta_n = r^{1-n} [d/dr (r^{1-n}) d/dr] \text{ avec } r \in (0, \infty)$$

La solution est donnée par (3.6.31) : $\psi(r) = r^v$ avec $v = [(2-n)/2] \pm [(2-n)/2]^2 + a^2]^{1/2}$

Ainsi pour des zéro espace ($n=0$) alors (3.6.32) $v = 1 \pm (1+a^2)^{1/2}$

$$(\Delta_n - a^2 r^{-2}) \psi(r) = 0 = (v r^{v-2}) (\dots + 1 + 1 + 1 + \dots) + v(v-2) r^{v-4} [\dots + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + \dots] - a^2 r^{v-2}$$

De même pour des $n = -1$ espaces (3.6.34) $v = (3/2) \pm [(9/4) + a^2]^{1/2}$ pour cette valeur

$$(\Delta_n - a^2 r^{-2}) \psi(r) = 0 = (v r^{v-2}) (\dots + 1 + 0 + 1 + \dots) + v(v-2) r^{v-4} [\dots + x_{-1}^2 + 0 + x_1^2 + \dots] - a^2 r^{v-2}$$

De même également avec $n = -m$ ($m \geq 1$) et donc m gaps : $v = [(2+m)/2] \pm [(2+m)/2]^2 + a^2]^{1/2}$ etc

Pour résumer, on doit insister sur la consistance du concept d'anti espace et de métriques négatives pour les solutions de 4 classes d'équations de trois types différents.

4. Figures régulières dans les anti-espaces

A ce stade de nos propositions nous n'avons pas encore analysé les figures susceptibles d'être attachées aux zéro-espace et aux espaces de dimensions négatives en utilisant la notion de métrique (3.6.2) et (3.6.4). Est-il possible de concevoir une extension de l'approche standard ? Une des questions majeures est de savoir s'il serait possible de lever tous les paradoxes que semblent recéler les propositions qui sont les nôtres ? Serait-il possible de construire des intuitions à partir de notions qui leur semblent si contraires ? Voyons cela.

4.1. Le cube négatif

En dimension positive quelconque le volume d'un n-cube est donnée par

$$(4.1) \quad V_n = \prod_{k \in [1, n]}(h) = h^n$$

Dans le cas d'un zéro-espace conformément aux axiomes (2.45) nous trouvons un volume unité

$$(4.2) \quad V_n = \prod_{k \in [-\infty, +\infty]}(h) = \dots hhh \dots = 1$$

Pour un (-1)-espace, toujours attendu ce qui précède

$$(4.3) \quad V_{-1} = \dots hh.1.hh \dots = h^{-1}$$

Et de façon générale pour $m = -n$ multiplicateur de DDP nous avons pour un (-n)-cube

$$(4.4) \quad V_{-m} = V_n = h^{-m} = h^n$$

L'équation (4.4) montre que l'approche conserve la forme générale de l'équation (4.1) même pour des valeurs non positives. Ces équations détiennent une remarquable puissance heuristique en particulier le fait que pour un (0)-cube le volume soit toujours de valeur unité *quelle que soit l'échelle choisie* est un résultat tout à fait remarquable qui fait inmanquablement penser à des géométries fractales qui font précisément perdre l'intuition de l'échelle de mesure. Peut-être cette propriété a-t-elle une tout autre signification physique inconnue à ce stade.

De même, l'équation (4.4) pour $n \leq 1$ qui entraîne que les cubes intuitivement plus « grands » ont néanmoins les volumes les plus « petits ». Cela signifie que des objets de petits volumes sont composés d'objets de plus grandes tailles.

Selon (4.4) pour $n \leq 1$, plus le cube est grand moins l'est son volume. Ceci semble indiquer que les espaces les plus petits sont composés d'objets dont la taille est de plus en plus grandes. Ainsi peut-on imaginer que de tels objets ne sont pas observés dans le macroscope parce que leur volume est trop petit. L'autre idée est qu'ils sont sous nos yeux sans que nous en ayons conscience. Une fois de plus on pourrait suggérer de faire le lien avec des géométries fractales la dimension négative étant portée par les échelles de mesure spectrale.

Cette idée pourrait être supportée par l'extension de la notion de surface. Par exemple la surface d'un (n)-cube est donnée par

$$(4.5) \quad S_n = 2nh^{n-1}$$

La surface est donnée par la somme sur les n , $(n-1)$ -faces. A première vue la situation pour $n=1$ n'est pas intuitif car alors que le cube est un segment de droite, $S_1=2$. On observera toutefois que ce segment à 2 points extrêmes (deux bouts) caractérisés par un (0)-volume de valeur unité ce qui rend le résultat $S_1=2$ parfaitement cohérent.

Extrapolons pour des valeurs négatives à partir de (4.5) il vient que la (0)-surface est égale à zéro : $S_0=0$. On observera que ce résultat n'indique pas l'absence de surface. Celle-ci est simplement inobservable du fait de son lien avec la quasi somme $\dots 1+1+1+1+1 \dots = 0$ ou avec $\dots +1-1+1-1+1 \dots = 0$. Si $n \leq 1$ il est possible de proposer plusieurs options pour les valeurs de surfaces négatives.

La première idée est d'imaginer des surfaces percées de trous. Il est tout à fait possible que cette idée soit liée à la notion de filtre ou d'ultrafiltre [] puisqu'on en connaît le lien avec les séries.

La deuxième idée serait de relier ces propriétés à des quasi somme de séries mais celles-ci seraient divergente et de termes positif (DS)

La troisième idée serait d'imaginer une surface orientée vers le centre du (-n)-cube. Si tel est le cas ce type de cube s'étend infiniment dans une espace interne dont la (-n+1)-surface constituerait un interface accessible à l'observation. On pourrait penser à une interface quantique constitutif du monde macroscopique. Une telle interprétation serait cohérente avec la dépendance inverse du volume et de la taille.

Nous pouvons examiner également la diagonale du cube standard :

$$(4.6) \quad d_n = [\sum_1^n (h^2)]^{1/2} = (nh)^{1/2}.$$

Conformément à (2.39) pour des 0-espace $d_0=0$ et pour des espaces de dimensions non positives

$$d_{-m} = d_n = [\sum_{-\infty}^{-m} (h^2) + \sum_{-1+m}^0 (h^2) + \sum_1^{\infty} (h^2)]^{1/2} = (-mh)^{1/2} = (nh)^{1/2}$$

Ces équations montrent que la dépendance de (4.6) peut être étendue dans les dimensions de valeurs négatives et pour de telles valeurs le résultat est un nombre imaginaire. Ainsi n'a-t-on pas ici besoin d'utiliser le paramètre temps pour obtenir une longueur imaginaire. Nous avons rencontré ci avant des situations où les quasi-sommes de séries divergentes à termes positifs donnent des grandeurs imaginaires (3.13). Il est aussi possible d'expliquer ce type de situation à partir de l'interprétation des surface de (neg)-Cube dont la diagonale serait située en dehors d'un tel cube.

4.2. La sphère négative

Le cas de la (n)-sphère de rayon R est particulièrement intéressant car il met en œuvre la fonction gamma et fait jouer la parité :

$$(4.7) \quad V_n = \pi^{n/2} R^n / \Gamma[(n/2)+1]$$

Dans l'hypothèse où il est possible d'étendre cette formulation pour des dimensions non positives il vient

$$(4.8) \quad V_0=1 ; V_{-1}=1/\pi R ; V_{-2}=0 ; V_{-3} = -1/2\pi^2 R^3 ; V_{-4}=0 ; V_{-5} = 1/4\pi^2 R^5 ; \text{ etc}$$

A ce stade il n'est pas du tout certain que nous calculions correctement les volumes présentant une parité $V_{-2m} = 0$. Il est tout à fait possible que le facteur gamma dans (4.7) dans le cas $n=-2m$ dut être interprété comme une demi somme présentant une valeur finie

$$(4.9) \quad \Gamma[(n/2)+1] = (1/2)[\Gamma[(n+\varepsilon)/2 + 1] + \Gamma[(n-\varepsilon)/2 + 1]]_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

Par ailleurs (4.7) pour $n>0$ pourrait être exprimée par le produit

$$V_n = \prod_{k \in [1, n]} [\pi R \Gamma(k+1)] / [2^n \Gamma^2(k/2 + 1)]$$

Alors conformément à (2.45) le calcul pour des valeurs de n non positives utilisant les DDP conduisent à

$V_n = \prod_{k \in [-\infty, +\infty]} ([\pi R \Gamma(k+1)] / [2^n \Gamma^2(k/2 + 1)]) = 1$ dans le cas où $k=0, -1, -2, -3, \dots$. Cependant cette formule pose problème car certains facteurs (exemple $k=-1$) tendent vers l'infini.

Il est intéressant de passer aux surfaces afférentes.

$$(4.10) \quad S_n = 2\pi^{n/2} R^{n-1} / \Gamma[n/2]$$

Expression qui conduit pour des valeurs de n non-positives à

$$(4.11) \quad S_0=0 ; S_{-1}=-1/\pi R^2 ; S_{-2}=0 ; S_{-3}=3/2\pi^2 R^4 ; S_{-4}=0 ; S_{-5}=15/4\pi^3 R^6 ; \text{ etc}$$

L'interprétation des zéros et des valeurs négatives ont déjà été discutées à propos du (n)-cube. Considérons l'équation définissant le rayon standard pour la (n)-sphère. Nous avons :

$$+x_1^2+x_2^2+\dots x_n^2=R^2$$

Il est alors raisonnable de poursuivre par analogie pour des zéro-espaces et pour des espaces à m gaps soit

$$(4.12) \quad \dots+x_{-2}^2+x_{-1}^2+x_0^2+x_1^2+x_2^2+\dots=R^2$$

$$(4.13) \quad \dots+x_{-m-1}^2+x_{-m}^2+\sum_{-m+1}^0 0+x_1^2+x_2^2+\dots=R^2$$

En supposant que toutes les coordonnées sont les mêmes $x_k=a$ il vient

$$(4.12-14) \quad 0=R^2$$

$$(4.13-14) \quad -ma^2=R^2$$

Il apparait donc que pour tous les (0)-espace le rayon de la sphère soit réduit à zéro. Cependant il existe bien une infinité de points pour lesquels l'équation (4.12) est vérifiée sans aucune restriction. Il s'en suit que ce type de sphère possède une structure complexe dont la représentation échappe totalement à notre intuition. L'interprétation de (4.14) est semble-t-il plus simple et relève du même type de paradoxe pour la diagonale du cube de dimensions négatives. : à savoir le jeu des nombres complexes. Il est possible que la sphère soit retournée de manière interne son rayon étant externe comme il l'est pour les espaces hyperboliques.

4.3. Le tétraèdre en dimensions non positives

Le volume d'un (n) simplex de coté h dans un espace standard est donné par

$$(4.16) \quad V_n=[(n+1)/2^n]^{1/2} \cdot h^n/\Gamma(n+1)$$

Sa surface de toute ses faces étant aussi un simplex il s'en suit que

$$(4.17) \quad S_n=(n+1)V_{n-1}$$

Par extension à des simplexes dans des espaces non positives il vient :

(4.18) $V_0=1$ et $S_0=0$ mais aussi (4.19) $V_n=0$ et $S_n=0$ pour tout $n \leq -1$. En dimension zéro les résultats (4.18) ne constituent pas une surprise car ils sont analogues aux résultats pour le (0)-cube et la (0)-sphère. L'interprétation qui peut en être donnée est la même et ne signifie en rien que ces objets sont assimilables au néant.

4.4. Commentaires

Le fait que $V_0=1$ dans les géométries standards (4.1) (4.7) et (4.16) n'est en rien surprenant en effet tout n-volume et mesuré au moyen d'autres n-volumes. Il en résulte que dans des géométries positives le concept de point ne véhicule aucune structure. Son volume ne dépend pas de sa forme. *Cependant dans des géométries de dimensions négatives la situation devient radicalement différente.* L'équation (4.12) montre par exemple que les zéro-géométries véhiculent des structures de points. En pratique il faut distinguer deux types de manifestations des zéros algèbres : les zéros standards et les zéros structurés (voir les axiomes 2.39). *Il en résulte que les espaces de dimensions zéros doivent manifester des propriétés naturellement duales.* Si la géométrie est considérée comme faisant partie de la géométrie standard, alors la notion de point est également une notion standard sans structure. Si par contre la zéro-géométrie est placée dans le contexte d'un anti-espace l'essence du point acquiert une structure.

Peut-être faut-il insister sur l'hypothèse complémentaire selon laquelle la métrique usuelle (3.1) utilise le concept de distance, soit encore un objet de l'espace de dimension 1 entre points de dimension zéro. Ces objets appartiennent à des espaces de dimensions jamais inférieures à l'unité. Selon l'introduction des zéros espaces et des métriques négatives des objets de grandes dimensions (ici un point ou une ligne combinés avec les DDS) sont « contenus » dans des espaces de dimensions plus petites. Une autre façon d'exprimer la même classe d'interrogations est de se demander dans quelle mesure les zéros espaces et les métriques négatives n'entraînent pas qu'au-delà des seuls points et segments de telles géométries puissent contenir des figures de dimensions supérieures. On pointera cependant la difficulté qui suit : cette façon de « mal » nous exprimer ne traduit peut-être rien de plus que le blocage mental et sémantique induits par les paradigmes mathématiques et physiques dont nous ne pouvons-nous départir malgré nos efforts. Seuls les développements de la théorie et le heurt avec les paradoxes sous-jacents devraient permettre de construire une intuition des indications quantitatives ci-dessus

5. Equation de Schrodinger dans les anti-espaces

A ce stade du raisonnement il est intéressant d'analyser les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger, dans des (0)-espace et des espaces de dimensions négatives. On pourrait s'interroger sur l'intérêt d'une telle étude si la question n'était pas à inverser. Sachant ce que l'on sait sur cette équation et ses liens avec la mécanique quantique peut être pourrait-elle nous éclairer non pas sur sa simple extension mais sur les propriétés des espaces étranges sous-jacents à la lumière des modifications qui résulteraient de l'extension que nous proposerons. Cette approche pourrait-être d'autant plus intéressante que la fonction zêta de Riemann est solution de l'équation de Schrodinger et qu'elle recèle donc des propriétés arithmétiques directement liées à des caractéristiques autosimilaires y compris dans les champs infinis.

5.1. Equation de Schrödinger dans les espaces standards

Rappelons brièvement ce que l'on sait des solutions de cette équation

Pour des symétries sphériques en dimension « n » standard et deux particules en interactions on peut écrire :

$$(5.1) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\frac{\beta}{r^{n-2}} - \varepsilon \right) \right] \Psi(r) = 0 \quad \text{avec } r \in [0, \infty], \Psi(0) < \infty \text{ et } \Psi(\infty) = 0$$

où r est la distance du centre de gravité des deux particules considérées. Le terme entre parenthèses représente la dépendance de l'énergie potentielle en fonction de cette distance. Le facteur β regroupe toutes les propriétés associées aux constantes fondamentales masses charges, constantes d'interaction. $\beta > 0$ (respectivement négatif) correspond à une attraction entre particules (respectivement une répulsion). Le coefficient $\varepsilon = \text{const.} > 0$ est proportionnel à l'énergie du système. Dans le cas standard où $n=3$ l'équation devient

$$(5.2) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \left(\frac{\beta}{r} - \varepsilon \right) \right] \Psi(r) = 0 \quad \text{dont la solution pour } r \rightarrow \infty \text{ est donnée par}$$

$$(5.3) \quad \Psi = F(r) \exp[-(\varepsilon r)^{1/2}] \quad \text{par substitution dans les formules précédentes on a}$$

$$(5.4) \quad rF'' + 2[1 - (\varepsilon r)^{1/2}]F' + [\beta - 2\varepsilon^{1/2}]F = 0 \quad \text{avec la solution pour } r \rightarrow 0 \text{ sous la forme de séries}$$

$$(5.5) \quad F = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m r^m) \quad \text{le coefficient de la série peut être obtenu par substitution}$$

de (5.5) dans (5.4) qui satisfait la relation de récurrence

$$(5.6) \quad a_{m+1} = a_m \frac{2(m+1)\varepsilon^2 - \beta}{(m+1)(m+2)}$$

Physiquement une solution acceptable pour (5.2) correspond au cas où (5.6) devient inopérant en particulier pour (5.7) $\varepsilon = \varepsilon_m = \beta^2/4(m+1)^2$ pour $m=0,1,2,\dots$. Aucune autre solution n'est finie pour $r \rightarrow \infty$. Cette analyse cursive montre que l'équation (5.2) possède un spectre discret de solutions propres en énergie. Une des conséquences est que la molécule d'hydrogène peut exister dans un espace à 3 dimensions. La fonction d'onde Ψ est évidemment définie à une constante près. Dans le cas $n=4$ on peut utiliser de la variable $\rho=r(\varepsilon)^{1/2}$ et donc

$$(5.8) \quad \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(\frac{\beta}{\rho^2} - 1 \right) \right] \Psi(\rho) = 0$$

Sans même résoudre cette équation il est possible d'affirmer qu'aucune solution discrète n'est concevable ce qui exclut la possibilité d'un objet de type hydrogène en 4 dimensions. Cette équation est valable pour tous les systèmes d'interactions entre particules car dès lors que l'on utilise $\rho_{ik} = r_{ik}(\varepsilon)^{1/2}$, le paramètre ε disparaît. Par ailleurs pour tous les systèmes réels on note des déviations à courte distance par rapport à la loi de puissance. Il en résulte que (5.8) voit apparaître des termes additionnels et l'argument précédent perd sa validité.

Pour $n \geq 5$ l'équation (5.1) pour $r \rightarrow \infty$ devient par une équation de type Bessel

$r^2 \Psi'' + r(n-1) \Psi' + \beta r^{4-n} \Psi = 0$ dont les solutions associées à $\nu = (n-2)/(n-4)$ sont données par

$$(5.9) \quad \Psi = r^{(n-2)/2} J_\nu [-(2/n-4)\beta^{1/2} r^{(4-n)/2}] \quad \text{et} \quad \Psi = r^{(n-2)/2} Y_\nu [-(2/n-4)\beta^{1/2} r^{(4-n)/2}]$$

Où J_ν et Y_ν sont les fonctions de Bessel respectivement de premier et de second ordre. L'expression (5.9) pour $n \geq 5$ est oscillante pour $r \rightarrow 0$ avec en outre un accroissement de la fréquence et de l'amplitude alors sans signification physique ce qui exclut une interaction de type r^{2-n} , donc l'existence d'objet de type hydrogène comme nous l'avons déjà signalé. Il y a par contre un intérêt réel à examiner les cas $n=1$ et $n=2$.

Pour $n=1$, la formulation (5.1) prend la forme (5.10) : $\left[\frac{d^2}{dr^2} + (r\beta - \varepsilon) \right] \Psi(r) = 0$

On peut opérer la transformation $r = \beta^{-1/3} \rho + \varepsilon \beta^{-1}$ soit $\rho = \beta^{1/3} r + \varepsilon \beta^{-2/3}$ qui change (5.10) en une équation d'Airy (5.11) : $\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \right] \Psi(\rho) = 0$ avec $\rho \in [\varepsilon \beta^{-2/3}, \infty]$. La fonction potentielle dépend continument de la variable r , ce qui exclut un spectre discret de solutions. La solution particulière $\Psi = (\rho)^{1/2} J_{1/3}[(2/3)\rho^{3/2}]$ confirme cette conclusion.

Pour $n=2$, l'équation (5.1) prend la forme (5.12) : $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\beta \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - \varepsilon \right) \right] \Psi(r) = 0$. On peut alors faire les changements de variables suivants : $r = r_0 \exp[(\rho + \varepsilon)/\beta]$ avec $\rho = \beta \ln(r/r_0) - \varepsilon$, ce qui conduit à $\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \rho k(\varepsilon) \exp(2\rho/\beta) \right] \Psi(\rho) = 0$ avec $k(\varepsilon) = (r_0^2/\beta^2) \exp(2\varepsilon/\beta)$. Il est évident que la fonction ψ dépend continument de ε . On en déduit que les états purs n'existent pas. Donc, dans des espaces standard de dimensions positives la molécule d'hydrogène ne peut exister que si $n=3$. La question qui se pose à se stade est donc l'extension en dimensions non positives

5.2. Equation de Schrödinger dans le zéro-espace

Pour $n=0$, l'équation (5.1) devient (5.13) $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + (\varepsilon - \beta r^2) \right] \Psi(r) = 0$ avec $r \in [0, \infty]$, $\Psi(0) < \infty$ et $\Psi(\infty) = 0$. Attendu les signes positifs de ε et β l'équation (5.13) décrit des interactions

répulsives entre particules pour un oscillateur harmonique. Le traitement standard peut alors être utilisé. En particulier en utilisant la relation (5.14) $\Psi=F(r) \exp[-(\beta^{1/2}/2)r^2]$ relation qui conduit à traiter de la relation (5.15) : $rF''-(1+2r^2\beta^{1/2})F'+\epsilon rF=0$. Pour $r \rightarrow 0$ avec $F \propto r^\nu$, et la contrainte de finitude à la limite nulle pour r : $\nu(\nu-2)=0$. La solution est donc donnée sous la forme d'une série (5.15) $F=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m r^{m+\nu})$ avec $\nu=0,2$. (5.15) dans 5.14 conduit à

$$(5.17) \quad a_{m+2} = a_m \frac{2(\nu+m)\beta^{\frac{1}{2}} - \epsilon}{(\nu+m+2)(\nu+m)} \text{ avec } \nu=0,2$$

Toutefois $\nu=0$ conduit à un résultat non physique. Quand $a_0 \neq 0$, a^2 devient infini. Les seules solutions concevables sont donc données par

$$(5.18) \quad a_{m+2} = a_m \frac{2(2+m)\beta^{\frac{1}{2}} - \epsilon}{(4+m)(2+m)} \text{ avec } m=0,2,4,\dots$$

La fonction d'onde est alors donnée par

$$(5.19) \quad \Psi=(a_0 r^2 + a_2 r^4 + a_4 r^6 + \dots) \exp[-r^2(\beta)^{1/2}/2]$$

Cependant la série est divergente puisque m tend vers l'infini. Son comportement est de type

$$(5.20) \quad a_{2m} \sim [r^2(\beta)^{1/2}]^m / m!$$

Pour (5.20) la fonction F représentée par (5.16) pour $r \rightarrow \infty$, est caractérisée par une fonction limite $\exp[r^2(\beta)^{1/2}]$ et le facteur exponentiel dans (5.19) ne peut compenser la croissance rapide de $F(r)$. Il en résulte que la seule solution physiquement acceptable qui est liée au cas où (5.16) conduit à des valeurs discrètes des solutions (valeurs propres de l'énergie) pour lesquelles les solutions de (5.13) existent. A savoir (5.21) : $\epsilon = \epsilon_m = 2(m+2)\beta^{1/2}$ avec $m=0,2,4,\dots$. Il s'en suit d'une part que par rapport au cas $n=3$, les niveaux d'énergies sont positifs et positionnés à égale distance de manière stable les uns des autres (voir analogie avec un oscillateur harmonique) d'un facteur $4\beta^{1/2}$; d'autre part un tel système, caractérisé par des interactions répulsives, conduit à des règles d'incertitude semblables à celle de Heisenberg soit une indiscernabilité à $\Psi(0)=0$ et donc pour $m=0$ une valeur finie de l'interaction $\epsilon_0 = 4\beta^{1/2}$.

5.3. Equation de Schrödinger dans les espaces de dimensions négatives

Pour $n \leq 1$ alors l'équation (5.1) prend une forme similaire à (5.13)

$$(5.22) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(1-n)}{r} \frac{d}{dr} + (\epsilon - \beta r^{2-n}) \right] \Psi(r) = 0 \quad \text{avec } r \in [0, \infty], \Psi(0) < \infty \text{ et } \Psi(\infty) = 0.$$

En négligeant le terme βr^{2-n} , on constate que dans un espace de dimension négative, la fonction d'onde de la particule ne converge pas (5.23) : $\Psi = \Psi_0 \propto r^{2-n}$, avec $r \rightarrow 0$.

En ignorant le terme ϵ dans (5.22) on voit que le facteur principal qui détermine le comportement pour $r \rightarrow \infty$, prend la forme

$$(5.24) \quad \Psi = \Psi_\infty \propto \exp[-(2/4-n) r^{(4-n)/2} (\beta)^{1/2}/2]$$

Pour $n=0$ dans (5.24) suit (5.14). Par substitution dans (5.22) $Y=F$. Ψ_∞ le besoin de retrouver une fonction F comme une série polynomiale, se heurte à une impossibilité. Seule une étude qualitative est possible. Voyons ce qui se passe si on applique la relation suivante dans (5.22)

$$(5.25) \quad \Psi = r^\mu \cdot \Phi \quad \text{avec } \mu = (1-n)/2$$

On trouve alors pour équation différentielle

$$(5.26) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + (\varepsilon - \beta r^{2-n} - (1-n)(3-n)/4r^2) \right] \Phi(r) = 0$$

Cette équation décrit un mouvement quantique sur le demi axe $r \in [0, \infty]$ avec pour fonction potentielle (5.27) $U = \beta r^{2-n} + (1-n)(3-n)/4r^2 > 0$. Aux bornes du domaine d'existence cette fonction tend vers l'infini et présente un minimum pour la valeur

$$(5.28) \quad r_{\min} = [(1-n)(3-n)/2\beta(2-n)]^{1/(4-n)}$$

La première condition aux limites pour (5.26) selon (5.23) et (5.25) est contrainte par l'inégalité

$$\Phi(r) \leq \text{const.} r^{(3-n)/2}, \text{ pour } r \rightarrow 0 \text{ et (5.29) } \Phi(0) = 0 \text{ et (5.30) } \Phi(\infty) = 0$$

Finalement l'équation (5.26) dans le domaine $r \in [0, \infty]$ avec les conditions aux limites ci-dessus possède une infinité de solutions discrètes correspondant à des valeurs propres $\varepsilon_m > 0$. Ce fait est expliqué par la contrainte $n \leq 1$ le puit de potentiel (5.27) possède un mur vertical pour $n=0$ si la solution existe. Donc, il existe en pratique un spectre discret d'énergie pour tous les espaces de dimensions non positives.

5.4. Le mouvement orbital

Nous ne pouvons à ce stade visualiser un quelconque mouvement de rotation dans un espace à dimension non positive. Nous pouvons cependant considérer une généralisation de la formule (5.22) relatif à une certaine rotation δ , sous les mêmes contraintes, soit :

$$(5.31) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(1-n)}{r} \frac{d}{dr} + (\varepsilon - \beta r^{2-n} - \delta/r^2) \right] \Psi(r) = 0 \quad \text{où } r \in [0, \infty] \text{ et } \delta > 0$$

Pour $n=0$ la fonction Ψ peut-être pensée comme dans (5.14). Dans ce cas au lieu de (5.15) nous obtenons pour la fonction F :

$$(5.32) \quad r^2 F'' - (1+2r^3\beta^{1/2})F' + (\varepsilon r^2 - \delta)F = 0, \text{ avec pour } r \rightarrow 0$$

$$(5.33) \quad F \propto r^\nu \text{ avec } \nu = 1 + (1+\delta)^{1/2}$$

Une valeur négative pour ν n'est pas compatible avec la condition $\Psi(0) < \infty$ et doit donc être exclue. En appliquant la même procédure que précédemment

$$(5.34) \quad F = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m r^{m+\nu}) \quad \text{avec } \nu = 1 + (1+\delta)^{1/2}$$

Donc en rendant équivalente les lois de puissances on trouve la loi de récurrence suivante :

$$(5.35) \quad a_{m+2} = a_m \frac{2(\nu+m)\beta^{1/2} - \varepsilon}{(2+\nu+m)(\nu+m)} \quad \text{Il s'en suit que pour}$$

$$(5.36) \quad \varepsilon = \varepsilon_m = 2[m+1+(1+\delta)^{1/2}]\beta^{1/2} \text{ la série (5.34) diverge. En conséquence la formule}$$

(5.36) donne les valeurs possibles des niveaux d'énergies en présence d'un mouvement orbital.

Maintenant si nous considérons $n \leq 1$, (5.25) et (5.31) conduisent à un analogue de l'équation (5.26)

$$(5.37) \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + (\varepsilon - \beta r^{2-n} - [\delta + (1-n)(3-n)]/4r^2) \right] \Phi(r) = 0$$

En comparant (5.26) et (5.37) on fait ressortir que le facteur $\delta + (1 - n)(3 - n)/4 > 0$ n'entraîne pas de grande différence avec le cas $\delta=0$.

6. Quelques analogies en physique

Concevoir une mécanique dans l'anti espace et une géométrie physique dans des métriques négatives sont d'autant plus des gageures qu'il faudrait utiliser des données expérimentales et concevoir des expériences adaptées à des représentations qui restent conceptuellement encore ouvertes. Cependant de nombreux indices laissent penser qu'il existe un lien entre les notions proposées et la microphysique. Celle-ci n'est probablement pas seulement déterminée par la discrétisation mais nous anticipons des liens avec les espaces de dimensions négatives. Les propriétés quantiques ne pourraient pas être simplement observées du fait contre intuitif, de la dépendance inverse du « volume » de tels objets avec la taille.

6.1. L'anti-espace et le dualisme de la notion de point

Comment nous orienter dans le labyrinthe des idées associées à la notion d'espace de dimensions non positives La question est délicate. Pour ce qui est des espaces de zéro dimension il s'agit d'un espace d'extension infinie dénombrable d'axes orthogonaux les uns aux autres⁶.

Le travail le plus immédiat devrait être attaché à des études approfondies concernant les quasi sommes divergentes (DS) et doublement divergentes (DDS). Cependant sur le chemin de la création d'une mécanique et d'une physique de dimension négative il existe de multiples obstacles épistémologiques. Par exemple nous ne savons pas si la notion de masse ou de charge relève ou non du seul espace tridimensionnel ni même si ces notions peuvent avoir des contre parties dans des espaces de dimensions non positives. Quelle serait aussi la notion de flux de temps dans de tels espaces ? Y aurait-il un lien avec la notion d'anti temporalité évoquée dans la partie 1 de cette étude ? Toutes ces questions et de multiples autres restent ouvertes même s'il apparaît assez clairement qu'il pourrait exister un lien heuristique entre les espaces de dimensions non positives et les propriétés micro physiques. A très courte distance cette micro physique ne pointe pas seulement sur des propriétés issues de la discrétisation mais plus généralement sur des propriétés étranges (superposition, décohérence, intrication etc) qui pourraient être associées aux propriétés tout aussi étranges attribuables aux espaces de dimensions non positives. Le cœur de ces propriétés tient au lien inverse du volume et de l'échelle. C'est ce lien qui en premier lieu qu'il nous importerait d'étudier. Par ailleurs le point est aussi un espace de dimension standard zéro. Il devrait donc être possible de concilier ces deux notions. On peut par exemple émettre l'hypothèse suivante : En fonction des types d'interactions entre eux, les zéro-objets peuvent dualement faire apparaître l'une ou l'autre de ces propriétés « métriques ». Selon cette vision les différents types d'interactions (observation ou mesure) pourrait trouver leurs origines dans le dualismes des quasi sommes dans les zéros termes d'une série qui simultanément correspondent à un zéro commun et à une DDS disposant d'une infinité de termes. Cette vision duale n'est pas absolument nouvelle. Le principe d'incertitude de Heisenberg relève de ce type de dualité : (i) si l'électron est traité comme une particule -point son moment n'est pas défini ; (ii) s'il est considéré comme une onde étendue à l'infini son moment est parfaitement défini. La fonction de Dirac qui est la distribution représentant le point caractérisée par une infinité d'harmoniques distribuées sur l'axe des « x ».

$$(6.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{2\pi\infty} e^{ixt} dt$$

⁶ On pourrait utilement faire le lien avec les espaces utilisés pour représenter la fonction zêta de Riemann [RIO17]

6.2. L'hypothèse du big bang

L'origine de l'univers tridimensionnel pourrait être compris comme émergeant *ex nihilo*, d'espaces de dimensions non positives. Beaucoup de physiciens pensent actuellement que la matière a pu naître du vide physique qui ne doit être confondu avec le néant métaphysique car ce vide pourrait être associé à une géométrie singulière, anti-espace disposant d'une potentialité intrinsèque par essence. La matière serait alors le plus proche parent de ce vide primitif structuré mais inaccessible à nos sens. Les espaces de dimensions non positives, autrement dit les anti-espaces doivent selon nous être interrogés à la lumière de cette hypothèse. Seraient en particulier favorables leur extension infinie, peut être également leur extrême courbure et probablement leur infinie multiplicité (aussi nombreuse que le nombre de points concevables comme recouvrement et ordonnancement). Quelle classe de dimension pourrait changer dans le passage d'un proto espace à l'espace de dimension 3 qui seul présente des propriétés dénombrables pour nous ? Faut-il considérer un seul espace macroscopique de ce type ou plusieurs en interactions générant les zéros espaces dont la matière pourrait être issue? la gravité ne serait elle pas le fruit de quelques forces inconnues visant à un retour à des anti-espaces ? retour aux origines hypothétique bien sûr. Encore faudrait-il concevoir une échelle, une longueur significative sans que nous sachions si ce concept peut avoir un sens. Par exemple un trou noir est-il un objet de dimension zéro ou un espace de dimension négative ? Autant de questions ouvertes auxquelles il est impossible de répondre aujourd'hui mais qui n'en méritent que plus d'être posées.

6.3. Une liste d'analogies

A ce stade nous suggérons de présenter plusieurs faits que nous pourrions attribuer à des propriétés d'anti-espace

1. Le premier de ces concepts est celui de masse pour des particules subatomiques. Par exemple la formule de de Broglie établit que la longueur d'onde d'une particule de masse m en mouvement sous impulsion mv est donnée par $\lambda=h/(mv)$ soit une échelle de longueur inversement proportionnelle à une masse. Plus la longueur augmente plus la masse diminue. La longueur de Compton est de même teneur $\lambda_c=h/(mc)$. Au repos l'extension de la particule est infinie. Il suffit alors d'imaginer un lien covariant entre volume (lié à la longueur caractéristique) et masse pour concevoir le rôle sous-jacent d'anti-espaces de dimension négative.
2. Subséquemment la dualité onde-corpuscule porte en elle une analogie avec les espaces de zéros dimensions dont les propriétés sont évoquées ci-dessus. Mathématiquement cette dualité est au cœur de ces zéros-espaces fondées sur des zéros communs ou des DDS caractérisées par des quasi-sommes égales à zéros.
3. L'absence de pertes énergétiques lors de mouvements orbitaux pourrait être simplement expliquée par le truchement de la rotation d'anti-espaces associées alors caractérisées par des lois de radiations distinctes des espaces de dimension positive. Il devrait en être de même des propriétés de spin.
4. Il est supposé que les forces d'interactions des quarks F ne décroissent pas avec la distance. Selon la section 5 cette propriété pourrait être liée aux caractéristique d'anti espace $n \in \mathbb{C}1$. En effet dans ce cadre $F \sim r^{1-n}$. Expérimentalement la question reste ouverte sur l'hypothèse $n=1$ mais elle n'est pas encore tranchée à l'heure où nous écrivons ces lignes.
5. La fonction d'onde de deux particules dans un n -espace avec $n \leq 0$, pour $r \rightarrow 0$ prend la forme $\Psi \sim r^{2-n}$. Il en résulte que deux particules ne peuvent jamais prendre le même état $r=0$ pour les valeurs de n considérées.
6. Comparés aux électrons les quarks peuvent prendre des charges fractionnaires. Ce fait possède une explication simple dans le cadre des approches par le truchement des DS et DDS modélisant les anti espaces. Par exemple nous avons vu que les DS possédant des termes intégraux peuvent avoir des quasi sommes fractionnaires.

7. Peut-être serait-il [SMO05] utile d'examiner la structure des objets multidimensionnels en théorie des cordes à la lumière des espaces de dimensions non positives.
8. Le rôle des divergences en électrodynamiques quantiques est bien connu. Les techniques mises en œuvre relèvent alors de la renormalisation que l'on peut grossièrement associer à la soustraction de deux infinis conduisant à une valeur finie. Une série divergente est naturellement associée à un objet inobservable. Mais une telle caractéristique peut aussi être associée à une partie intégrale dans un anti-espace. Peut-être serait-il possible de faire intervenir des représentations mettant en jeu des espaces de dimensions non positives, etc

Conclusion

Cet article s'inscrit dans la recherche multi-centenaire visant à comprendre ce qu'est l'essence du temps, et en particulier le temps qui passe. Inscrite dans une philosophie multi millénaire il est établi par la physique que cette compréhension exige un entendement de la relation Espace-Temps. C'est elle en effet qui fonde, non sans contraintes formelles, la notion d'énergie et la notion d'action.

La première partie du travail présenté concerne le concept de temps-spirale proposé à la fin des années nonantes. Ce temps est pensé discrétisé dans les petites échelles, il est non homogène dans les grandes échelles, et il admet un terme dual nommé ici Anti-Temps. L'intervalle de temps exige d'être exprimé par le truchement des nombres complexes en faisant jouer un rôle central à la notion de phase. Dans le contexte du « macroscome » le temps de Newton ou celui d'Einstein-Minkowski apparaissent comme des formes limites de représentation. Dans le domaine du microscome l'expression complexe efface le paradoxe de la dualité Onde-Corpuscule et la particule en mouvement possède une position précise dans l'Espace-Temps donnée par des coordonnées complexes. Selon la nature de la mesure on peut observer soit la trajectoire d'une particule soit l'organisation d'une multiplicité en interaction. Le modèle de temps-spirale conduit en particulier à anticiper des ruptures de symétries et de parités, de nouvelles relations d'incertitudes liées à ces multiplicités auto organisées, ruptures qui pourraient expliquer un certain nombre des comportements microphysiques ainsi que des anomalies observées dans le modèle standard. En tout état de cause le modèle conduit à affirmer une décélération du temps cosmologique. L'anti-temporalité conduit à penser que le temps de la conscience n'est qu'une conséquence particulière de la notion de temps complexe, et plus précisément de temps-spirale. On lira avec intérêt les chapitres qui dans l'ouvrage complet des auteurs [TAG16], corréleront les données expérimentales avec la représentation nouvelle du temps.

Très naturellement cette notion d'Anti-Temporalité amène à s'interroger sur sa contrepartie spatiale : l'Anti Espace. Deux raisons principales conduisaient à établir un lien avec les séries divergentes. D'une part une raison physique liée à la nécessité de considérer ces mêmes séries dans les techniques sous l'éclairage de la renormalisation, techniques au cœur de la macro et micro physique moderne. La seconde raison d'ordre mathématiques concernait les caractéristiques étranges de ce type de séries et tout particulièrement le rôle de l'ordonnancement des opérations, autrement dit la non commutativité de celles-ci. Constaté que l'ordonnancement donc l'axiome du choix, sont fondamentaux pour traiter des séries divergentes ne peut être sans conséquences heuristiques. C'est dans ce contexte que la seconde partie de la présente communication s'attache aux espaces de dimensions non positives, espaces dont nous établissons le lien avec les séries doublement divergentes. Ce lien permet de considérer les espaces de dimensions non positives comme des extensions formelles des espaces standards de dimensions positives. Une fois de plus les représentations complexes entrent en jeu.

La combinaison des concepts d'Anti Espace et d'Anti-Temporalité se conjuguent pour donner un sens aux notions bien connues d'Anti-Matière et d'Anti Particules vues comme des trous dans les représentations standards. Les trous jouent un rôle central dans la détermination des séries divergentes. Il y a là matière à réflexions qui permettent de jeter un œil théoriquement neuf sur les liens entre macro

et micro physique. Initialement les auteurs pensaient que ces opportunités heuristiques nouvelles seraient relayées naturellement par la communauté scientifique. C'est ainsi qu'ils exprimaient dès 2016 l'assurance de ce relai. « On peut penser que les notions Anti-Temps et d'Anti-Espace deviendront bientôt aussi naturel d'emploi que la notion d'Anti-Matière » C'était oublier comme l'a noté Isabelle Stengers à propos des travaux de Ilya Prigogine et des polémiques qui ont suivi son prix Nobel [STE97], que la science est aussi le résultat d'un consensus social et que la loi du moindre effort s'applique bien plus semble-t-il aux esprits fussent-ils éclairés, qu'aux artifices couteux d'une physique qui contournant souvent les problèmes de fond [SMO07], [LON12,14], ne permettent toujours pas de comprendre la naissance du vivant et celle de la conscience humaine.

Note de l'éditeur : La numérotation des formules est telle que le second terme de cette numérotation se réfère toujours explicitement à celle de l'ouvrage des auteurs publié en anglais sous le titre Anti-Time and Anti-Space [TAG19]. Il sera donc facile pour les lecteurs possédant l'ouvrage de s'y référer. Ce texte ne fait pas explicitement référence à l'entropie mais en faisant référence à la géométrie de l'Espace-Temps il fait implicitement référence à l'algèbre qui se trouve associée à la géométrie donc à l'irréversibilité du temps du temps système. Qu'elle tienne à la géométrie (Taganov) ou qu'elle tienne à l'ordonnancement donc à l'axiome du choix (Babenko), irréversibilité est directement associé à l'entropie des systèmes dynamiques dans la balance toujours contingente entre l'Energie et l'Information.

In Memoriam : Ce texte est dédié à la mémoire du grand scientifique que fut Igor Taganov auteur du contenu scientifique de la première partie de ce travail [TAG05-17].

Bibliographies

- [BAB08] Babenko Yu. I. *Non positive dimension spaces* in Proceeding of the international conference: Problems of practical cosmology. (V2 p 54)23-27 June 2008 St. Petersburg.
- [COH91] Cohen Tanhoudji Gilles (1991) Les constantes universelles Ed. Hachette Paris
- [DIR58] Dirac P.A.M., *Principles of quantum Mechanics*, (1958) Clarendon Press, Oxford
- [HAR49] Hardy G.H. *Divergent séries* (1949) Oxford Clarendon Press
- [LON12] Longo G., Montevil M., Kauffman S., *No Entailing Laws, but Enablement in the of Biosphere* , The Fourteenth International Conference, pp.1379, Philadelphia, 2012.
- LON14] Longo G., « *A 2-Dimensional Geometry for Biological Time* », dans Perspectives on Organisms: Biological Time, Symmetries and Singularities, 75-97, Lecture Notes in Morphogenesis, Springer, 2014.
- [MIL33] MILNE E.A., *Structure of expansion of the universe*, Zeitschrift für Astrophysik 1933 6, p. 1-95
- [RIO17a] Riot P., Le Méhauté A., *Autosimilarité, fonction zêta et conjecture de Riemann*, REE 1, 2017 , p. 115-127.
- [RIO17b] Riot Philippe et Le Méhauté Alain, *the arrow of time in the quantum approach of Badioli's quantum approach of dynamics meaning of Riemann hypothesis* Condensed matter physics 20 (3) ,2017), p.1-13.
- [SIT33] de Sitter W., *Astronomical aspect of the theory of relativity*, 1933, 2 (8) University of California at Berkeley Press
- [SMO07] Smolin Lee, *Rien ne va plus en physique*, 2007, Dunod Paris
- [STE97] Stengers I., *Cosmopolitiques 1 et 2*, 1997 Ed. La Découverte Poche, Paris
- [TAG05] Taganov I., *Discovery of the deceleration of the course of time*, 2005, Russian Academy Press , St. Petersburg (ISBN5-902632-04-08)
- [TAG13] Taganov I., *Irreversible time physics*, 2013, Russian Academy Press , St. Petersburg (ISBN 978-5-902632-12-2)
- [TAG16] Taganov I, Babenko Yu.. *Anti Time and Anti Space* (2016) Russian Academy Press
- [TAG17] Taganov I., Ville Saari, *Energy from Time*, Energie aus Zeit // Nachrichten der Olbers-Gesellschaft Bremen, 256, Januar 2017: 4-7. file:///C:/Users/33777/Downloads/Article_Taganov-Saari_EnergyfromTime.pdf