

Approximation des premières conditions de l'expansion de l'univers, génération d'entropie et gravité

Approximation of the first conditions of the expansion of the Universe, entropy generation and gravity

Faycal Ben adda¹

¹Community College of Qatar, Doha, Qatar, f_benaddafr@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Pour pallier à l'absence de données astronomiques sur les premières conditions de l'expansion de l'univers, un modèle compatible avec le principe fondamental de la cosmologie permet de décrire les premières conditions de l'expansion de l'univers par une fonction d'état qui définit l'entropie à travers la variation de courbure locale de l'espace-temps. La prise en considération de la matière, de l'énergie et du rayonnement dans le modèle permet de décrire les premières conditions nécessaires à leur transformation après leur dislocation instantanée par l'expansion simultanée des éléments de base de l'espace initial. Le modèle permet d'élucider la distribution uniforme de la matière 380 000 ans après le début de l'expansion et conduit à identifier l'origine de la gravité.

ABSTRACT. To overcome the lack of astronomical data on the first conditions of the expansion of the universe, a model compatible with the fundamental principle of cosmology allows to describe the first conditions of the expansion of the universe by a state function that defines the entropy through the transformation of the local curvature of the space-time. The consideration of matter, energy and radiation in the model allows to describe the first conditions necessary for its transformation after its instantaneous dislocation by the simultaneous expansion of the basic elements of the initial space. The model elucidates the uniform distribution of matter 380,000 years after the start of expansion and leads to the identify the origin of gravity.

MOTS-CLÉS. Fonction d'état, courbure de l'espace, entropie, singularité, fond diffus cosmologique, Big Bang.

PACS. 97.60.Lf , 98.80.Bp , 98.80.-K , 04.30.-w , 45.20.D-

KEYWORDS. State function, space curvature, entropy, singularity, black holes, gravity, cosmic microwave background, Big Bang.

Introduction

Comment quantifier la transformation initiale de notre univers si les acteurs majeurs de sa transformation restent non identifiés d'une manière satisfaisante et dans certain cas ne dépassent pas l'état d'hypothèse. En effet, la répartition de la densité d'énergie de l'univers est estimée aujourd'hui à 68,3 % d'énergie sombre, 26,8 % de matière noire et 4,9% de matière ordinaire (Agence Spatiale Européenne ESA /Planck). De plus en raison de l'opacité de l'univers tout au début de son expansion, l'observation cosmologique ne peut pas fournir d'information concernant les premières conditions de l'expansion de l'espace qui ont généré la formation de la matière et sa distribution telle qu'on la voit juste après cette période opaque qui a duré approximativement 380 000 ans après le Big Bang.

Sans observation possible à l'appui, la période des premières conditions de l'expansion de l'univers est difficile à décrire et à étudier avec précision, elle est restée hypothétique dans tous les modèles acceptés, et même spéculative. Dans cette note, on s'appuie sur une simulation d'un espace en expansion homogène et isotrope à grande échelle compatible avec l'observation pour approcher les premières conditions de l'expansion de l'espace-temps en utilisant une nouvelle définition d'entropie sensible à la variation de la courbure de l'espace. Pour avoir une idée sur l'utilisation de l'entropie dans cette quête, on peut citer quelques récentes définitions d'entropie généralisée utilisant la densité d'énergie pour approcher les premières conditions de l'expansion de l'univers, comme par exemple (NOJIRI et al. 2022), (NOJIRI et al. 2022), (ODINTSOV et al. 2023), (EGAN et LINEWEAVER 2010).

Dans le suite note nous proposons d'approcher les premières conditions de l'expansion de l'univers durant sa période opaque en utilisant une notion d'entropie définie à partir d'une fonction d'état sensible à la variation de la courbure locale de l'espace-temps en expansion homogène et isotrope. On prend comme modèle d'espace une famille infinie de sphères empilées de même taille dotées d'une expansion simultanée discrète dans toutes les directions. Ce modèle simule l'expansion de l'espace-temps via l'expansion de ses éléments de base, il est inspiré du modèle de (BEN ADDA et PORCHON 2016) qui a contribué à un développement original de phénomènes jugés impossibles à expliquer à l'échelle atomique : en optique géométrique comme l'interprétation des interférences de l'expérience de la double fente de Young (YOUNG 1802), et en nanotechnologie comme le mécanisme d'attraction/répulsion de Casimir qui reste inconnu depuis la découverte du phénomène en 1948, et le phénomène du torseur de Van Der Waals (BEN ADDA 2021). De plus la compatibilité du modèle avec toutes les données d'observation des Supernovae du type Ia, a permis d'apporter une autre interprétation au phénomène de fuite accélérée des galaxies qui a commencé il y a 5 milliards d'années (BEN ADDA 2019), et cette interprétaion remet en question l'unique interprétation des prix Nobel de physique 2011.

A cause de l'expansion simultanée des éléments de base de l'espace, l'expansion de ce modèle est caractérisée localement par l'expansion d'une sphère, ce qui permet de définir une entropie locale qui ne dépend que d'une *limite inférieure* fixe (la courbure d'une sphère unité) et d'une *limite supérieure* qui dépend de l'expansion (la courbure d'une sphère en expansion). Cette approche permet de construire un nouvel outil d'analyse et d'interprétation des différentes étapes de transformation possible de l'univers par la caractérisation des différentes transformations de l'espace-temps (le conteneur) sans tenir compte de la matière et de toute forme d'énergie qu'il contient (le contenu). Par contre leur prise en considération, une fois le modèle établi, permet d'obtenir une interprétation intéressante de ce qui est inaccessible à l'observation. L'accumulation d'une infinité de sphères de même taille en expansion simultanée confère à tout l'espace une expansion homogène et relativement isotrope, ce qui est suffisant pour mener à terme notre étude des transformations de l'espace-temps et déterminer ce qu'on ne peut pas percevoir en considérant uniquement une entropie définie à partir de la transformation de la matière et de l'énergie.

1. Variations de la fonction d'état et génération d'entropie

La variation de la fonction d'état (l'entropie) peut être déterminée à l'équilibre thermique en terme de changements d'énergie et de température du système sous forme de chaleur (CLAUSIUS 1865), ou par la considération du nombre total de micro-états (BOLTZMANN 1872 et 1877), ou encore par l'intermédiaire d'une distribution de probabilité du système (SHANNON n° 3 et 4 1948). Néanmoins, toutes les définitions citées ci-dessus relatives à l'entropie ne concernent que les caractéristiques de la matière, et en aucun cas les transformations de l'espace-temps. En utilisant le modèle de simulation de l'expansion de l'espace introduit dans (BEN ADDA et PORCHON 2016), une caractérisation de l'expansion discrète de l'espace-temps peut être obtenue via la transformation de la courbure locale de l'espace-temps, puis une fonction d'état peut être associée à cette caractérisation. En effet, les transformations de l'espace sont quantifiées dans le modèle utilisé par une suite $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \geq 0}$ qui décrit la transformation discrète de l'espace initial \mathcal{E}_0 en l'espace-temps présent \mathcal{E}_n , où l'entier n représente la subdivision de l'intervalle de temps des transformations de l'espace initial \mathcal{E}_0 à l'espace-temps présent \mathcal{E}_n .

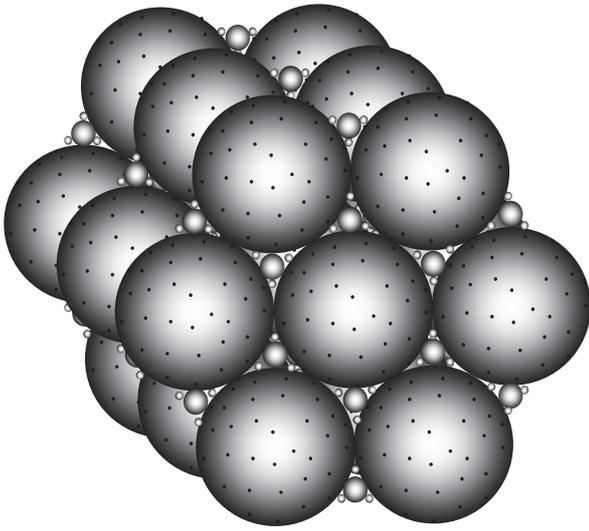


FIGURE 1. Illustration d'une portion de sphères accumulées sur lesquelles la matière est représentée par des points. Étant donné que la matière existe dans un espace à quatre dimensions, la surface d'une sphère représente une torsion d'un espace euclidien à quatre dimensions. Une 3-sphère ne peut pas être visualisée, néanmoins ce modèle simple permet de visualiser approximativement l'homogénéité et l'isotropie.

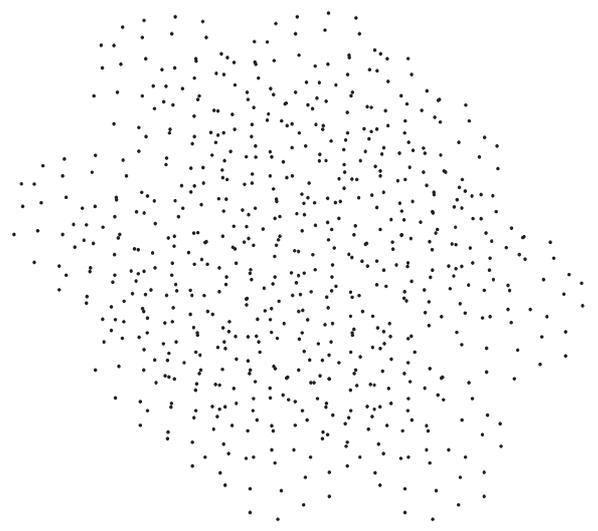


FIGURE 2. L'invisibilité de la géométrie des sphères accumulées signifie que l'illustration sur la Fig.2 est la même illustration que sur la Fig.1 sans visualisation de la géométrie des sphères. La matière représentée par des points semble être maintenue dans l'espace sans piliers visibles. L'homogénéité et l'isotropie sont approximativement vérifiées au sein de ce modèle puisqu'il n'y a pas de direction privilégiée révélée par l'observation.

1.1. Ajustement de la quantification

Dans ce qui suit, des changements mineurs du modèle de (BEN ADDA and PORCHON 2016) seront envisagés pour l'adapter à l'approche des premières conditions de l'expansion :

1. Dans cette quantification, l'espace-temps primordial sera noté \mathcal{E}_1 plutôt que \mathcal{E}_0 . L'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 représentera la surface de la dernière diffusion cosmologique d'où provient le fond micro-onde cosmique, environ 380 000 ans après le Big Bang. L'univers passe alors d'un état opaque à un état transparent qui conduit à l'apparition du fond diffus cosmologique (CMB) lorsque la lumière est libérée.
2. L'espace initial \mathcal{E}_i représentera l'espace avant le Big Bang, dont les éléments de base sont les entités limites des éléments de base de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 quand leur rayon tend vers zéro simultanément. Les premières transformations seront déterminées à partir des caractéristiques de la limite.
3. Nous proposons de quantifier l'expansion de l'espace-temps à l'aide d'une subdivision de la période de temps d'expansion partant de l'espace primordial \mathcal{E}_1 jusqu'à l'espace-temps \mathcal{E}_n . \mathcal{E}_n représente l'espace-temps présent après n expansions discrètes, où n représente le nombre de subdivisions de la période de temps pour la transformation discrète de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 vers l'espace-temps \mathcal{E}_n . Plus le nombre n de subdivisions est grand, plus la période de temps entre deux expansions successives est petite, et inversement, plus le nombre n de subdivisions est petit, plus la période de temps entre deux expansions successives est grande.

1.2. Ajustement du modèle

Nous considérons le modèle suivant où :

1. L'espace initial \mathcal{E}_i est l'espace initial dont les éléments de base sont des entités limites dotées d'une topologie proche de celle d'un point et définies comme la limite des éléments de base de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 lorsque le rayon tend vers zéro.

2. L'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 est l'espace-temps de départ de ce modèle à l'étape 1, défini par une famille infinie de sphères accumulées (on utilise des sphères au lieu de boules ouvertes) de petit rayon identique $r \in]0, 1[$ (la plus petite taille que la physique peut distinguer d'un point sans dimension) qui couvrent un espace euclidien. Ces sphères identiques accumulées définissent les éléments de base de l'espace-temps.

3. L'espace-temps \mathcal{E}_n est l'espace-temps \mathcal{E}_1 après n transformations simultanées (expansion) de ses éléments de base. L'espace-temps \mathcal{E}_n est représenté par une infinité d'accumulations d'éléments de base de même taille, modélisée par des sphères de rayon d'expansion quantifié par

$$R_n = r \left(\prod_{j=1}^n a_{j-1} \right) \quad (1)$$

où $(a_n)_{n \geq 0}$ est la suite des paramètres d'expansion de l'espace-temps introduite dans (BEN ADDA and PORCHON 2016), une suite numérique qui quantifie l'expansion discrète de l'espace-temps et qui vérifie $a_0 = 1$ et les conditions suivantes :

i) pour tout $n \geq 1$,

$$a_n > 1, \quad (2)$$

ii) pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} < a_n. \quad (3)$$

iii) le produit

$$\prod_{j=1}^n a_{j-1} \quad \text{est convergent,} \quad (4)$$

et où la courbure intrinsèque de chaque élément de base est définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\delta_n(r) = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{r \left(\prod_{j=1}^n a_{j-1} \right)}. \quad (5)$$

Le paramètre a_j est appelé le $j^{\text{ème}}$ paramètre d'expansion quantifiée de l'espace-temps, et $\prod_{j=1}^n a_j$ est appelé le paramètre d'expansion de l'espace-temps jusqu'à l'étape n .

4. Les interstices : l'expansion discrète de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n > 0}$ modélise un espace-temps homogène, isotrope et en expansion, dont les éléments de base sont en expansion simultanée. Au fur et à mesure que les sphères accumulées augmentent en taille, les interstices augmentent. La modélisation d'un espace dense entièrement couvert par des sphères conduit à utiliser la méthode d'Apollonius. Les

interstices sont remplis de sphères accumulées de différentes tailles qui augmentent progressivement avec l'expansion des éléments de base de l'espace-temps (comme illustré sur la Fig.3 ou sur la Fig.4). Le procédé pour couvrir les interstices avec des sphères accumulées de différentes tailles donne un caractère fractal local au modèle et une non-homogénéité locale, tandis que l'expansion simultanée des éléments de base de l'espace-temps fournit une approximation de l'homogénéité et de l'isotropie à grande échelle.

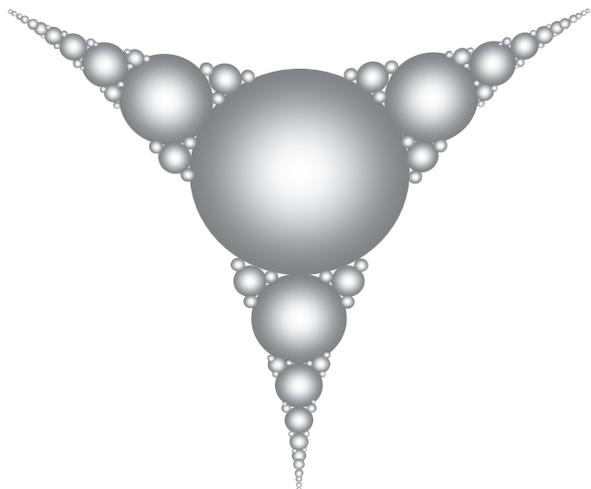


FIGURE 3. Illustration de sphères accumulées de différentes tailles pour remplir l'interstice de trois sphères accumulées de même taille. La plus grosse sphère est située au centre de l'interstice. Plus le nombre de sphères d'accumulation de même taille qui entourent l'interstice est petit, plus l'accumulation est stable. Ce modèle est appelé Apollonian Gasket.

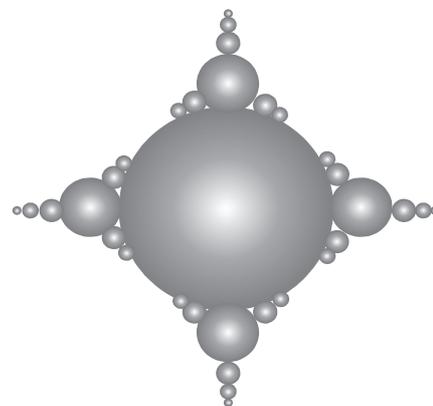


FIGURE 4. Illustration de sphères d'accumulation de différentes tailles pour remplir l'interstice de quatre sphères accumulées de même taille. La plus grosse sphère est située au centre de l'interstice.

5. La courbure de l'espace-temps en expansion $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ est approximativement déterminée par la courbure locale des éléments de base en expansion de l'espace-temps. Tous les éléments de base sont identiques et la courbure locale de l'espace-temps est donnée par la courbure d'un élément de base qui est une sphère de rayon donné par l'égalité (1) pour tout $n > 0$. La courbure des sphères dans l'interstice n'est pas considérée puisqu'elle concerne le non homogénéité local (pour les petites échelles). Par conséquent, la définition de la fonction d'état de l'espace-temps ne sera liée qu'à la transformation des éléments de base de l'espace-temps qui fournit l'homogénéité et l'isotropie à grande échelle et génère l'expansion de l'espace-temps.

1.3. Fonction d'état de l'espace-temps

En utilisant la courbure des éléments de bases de l'espace, on peut définir la fonction d'état de l'espace-temps comme suit :

DÉFINITION 1.— On considère l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$, où \mathcal{E}_1 est l'espace-temps primordial. Pour un petit rayon $r \in]0, 1[$ et une constante arbitraire finie positive k , on définit l'entropie de l'espace-temps \mathcal{E} à l'étape n pour tout $n > 0$ par

$$S_n(r) = -k \ln(\delta_n(r)), \quad \text{où} \quad \delta_n(r) = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{r \prod_1^n a_{j-1}} \quad (6)$$

est la courbure locale des éléments de base de l'espace-temps \mathcal{E}_n à l'étape n et R_n est le rayon d'un élément de base de \mathcal{E}_n .

La fonction (6) est une fonction d'état car elle est donnée par une intégrale qui ne dépend que de la limite inférieure (la courbure d'une sphère unité) et de la limite supérieure (la courbure de l'élément de base de l'espace-temps \mathcal{E}_n de rayon défini par (1)). En effet, la fonction (6) peut s'écrire

$$S_n(r) = -k \int_1^{\delta_n(r)} \frac{1}{t} dt = -k \left(\ln(\delta_n(r)) - \ln(1) \right) = -k \ln(\delta_n(r)). \quad (7)$$

1.4. Génération d'entropie quantifiée et génération d'entropie

En utilisant la fonction d'état ci-dessus donnée par (6), la variation quantifiée de la fonction d'état avec l'expansion de l'espace-temps, notée ΔS_n , est donnée par

$$\Delta S_n = S_{n+1}(r) - S_n(r), \quad (8)$$

où $S_n(r)$ est la fonction d'état de l'espace-temps \mathcal{E}_n à l'étape n , et $S_{n+1}(r)$ est la fonction d'état de l'espace-temps \mathcal{E}_{n+1} à l'étape $n + 1$.

Notation

a) On appelle *génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n+1$* de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E})_{n \geq 1}$ et on note $\Delta S_n = S_{n+1}(r) - S_n(r)$, la variation quantifiée de la fonction d'état entre l'espace-temps \mathcal{E}_n et l'espace-temps \mathcal{E}_{n+1} pour tout $n > 0$.

b) On appelle *génération d'entropie entre les étapes 1 et n* de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E})_{n \geq 1}$ et on note $\Delta S_n = S_n(r) - S_1(r)$ la variation de la fonction d'état entre l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 et l'espace-temps \mathcal{E}_n pour tout $n > 0$.

Ainsi pour tout $n > 0$, la génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n + 1$ est donnée par

$$\Delta S_n = k \ln\left(\frac{\delta_n(r)}{\delta_{n+1}(r)}\right), \quad (9)$$

où $\delta_n(r) = \frac{1}{R_n}$ est la courbure locale des éléments de base de l'espace-temps \mathcal{E}_n à l'étape n , et en utilisant la Notation a) et (9) on a

$$S_{n+1}(r) = S_n(r) + k \ln\left(\frac{\delta_n(r)}{\delta_{n+1}(r)}\right). \quad (10)$$

REMARQUE 1.– *i) La constante positive arbitraire k dans l'égalité (9) peut être considérée comme la constante de Boltzmann. La fonction d'état $S_n(r)$ définie par (6) est une fonction croissante. En effet, en utilisant (5), la courbure locale de l'espace-temps \mathcal{E}_n pour tout $n > 0$ est une fonction décroissante de n , et on a pour $r \in]0, 1[$, $\forall n > 0$, $\delta_{n+1}(r) < \delta_n(r)$, ce qui fait de (6) une fonction croissante de $\delta_n(r)$ lorsque n augmente.*

ii) La génération d'entropie quantifiée (9) entre les étapes n et $n + 1$ peut s'écrire en utilisant la notation intégrale comme suit

$$\Delta S_n = k \ln \left(\frac{\delta_n(r)}{\delta_{n+1}(r)} \right) = -k \int_{\delta_n(r)}^{\delta_{n+1}(r)} \frac{1}{t} dt. \quad (11)$$

1.5. Propriétés de la fonction d'état de l'espace-temps

On sait que la courbure mesure la déformation locale d'une courbe (ou d'une surface). C'est une grandeur qui mesure la vitesse à laquelle le graphique d'une courbe (ou surface) donnée s'écarte de la direction de la tangente au voisinage de points locaux. Étant donné que les éléments de base de l'espace-temps \mathcal{E}_n sont des sphères en expansion, alors on a les propriétés suivantes (pour plus de détails sur les preuves voir (BEN ADDA 2024)) :

PROPRIÉTÉ 1.– La génération d'entropie quantifiée (9) entre les étapes n et $n + 1$ de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ vérifie

$$(i) \forall n > 0, \quad \Delta S_n = 0 \iff \mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0} \text{ est un espace-temps statique,} \quad (12)$$

$$(ii) \forall n > 0, \quad \Delta S_n > 0 \iff \mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0} \text{ est un espace-temps en expansion,} \quad (13)$$

$$(iii) \forall n > 0, \quad \Delta S_n < 0 \iff \mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0} \text{ est un espace-temps en contraction.} \quad (14)$$

PROPRIÉTÉ 2.– La génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n + 1$ de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ mesure l'expansion quantifiée de l'espace-temps, en particulier pour tout $n > 0$

$$\Delta S_n = k \ln(a_n) \quad (15)$$

où a_n est le $n^{\text{ième}}$ paramètre d'expansion quantifiée de l'espace-temps \mathcal{E}_n .

PROPOSITION 1.– i) La génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n + 1$ de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ pour une courte période de temps entre deux étapes successives d'expansion vérifie

$$\Delta S_n \approx 0 \quad (16)$$

ii) La génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n + 1$ de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ pour une grande période de temps entre deux étapes successives d'expansion vérifie

$$\Delta S_n > 0 \quad (17)$$

PROPOSITION 2.– Si $(S_n)_{n>0}$ est la suite des fonctions d'état de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$, alors pour tout $n > 0$:

i) La génération d'entropie entre les étapes 1 et n de l'espace-temps due à la transformation de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 à l'espace-temps \mathcal{E}_n augmente à mesure que n augmente, et nous avons

$$\Delta S_n = S_n(r) - S_1(r) = k \ln \left(\prod_{j=1}^n a_{j-1} \right). \quad (18)$$

où a_j est le $j^{\text{ième}}$ paramètre d'expansion quantifiée de l'espace-temps \mathcal{E}_j , pour tout $1 \leq j \leq n$.

ii) La génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n + 1$ de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ pour deux expansions successives diminue à mesure que n augmente et nous avons pour tout $n > 0$

$$\Delta S_{n+1} < \Delta S_n. \quad (19)$$

REMARQUE 2.– i) L'égalité (16) signifie que le changement de courbure de l'espace-temps reste imperceptible pendant une courte durée considérée entre deux expansions successives par rapport à la durée totale nécessaire pour l'expansion de l'espace-temps \mathcal{E}_1 à l'espace-temps \mathcal{E}_n . Cependant pour la considération d'une longue période de temps entre deux expansions successives, la génération d'entropie quantifiée entre les étapes n et $n + 1$ est strictement positive (17).

ii) La génération d'entropie quantifiée décroît lorsque n augmente (Proposition 2, ii)), tandis que l'entropie de l'espace-temps augmente toujours avec une décélération (Proposition 2, i)).

1.6. Estimation asymptotique, espace des éléments de base asymptotiques

Dans cette étude, nous avons utilisé une subdivision de la période d'expansion de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \geq 0}$ entre l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 et l'espace-temps \mathcal{E}_n . Cependant, la transformation de l'espace initial \mathcal{E}_i vers l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 qui modélise la période opaque de notre univers (estimée à 380 000 ans après le Big Bang) n'est pas quantifiée. Un espace-temps intermédiaire qui quantifie cette période doit être conçu afin de caractériser et évaluer sa fonction d'état. En effet, par l'égalité (5), on sait que la courbure de l'espace-temps \mathcal{E}_1 est donnée pour un petit rayon $r \in]0, 1[$ par

$$\delta(r) = \frac{1}{r}, \quad (20)$$

en faisant tendre le rayon r de chaque élément de base de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 vers zéro pour approcher l'espace initial \mathcal{E}_i , la courbure locale $\delta(r)$ de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 tend vers la courbure limite δ_0 de l'élément de base de l'espace-temps initial \mathcal{E}_i et on a

$$\delta_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \delta(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} = +\infty. \quad (21)$$

1.6.1. L'ensemble des sphères asymptotiques en expansion

La divergence de la courbure $\delta(r)$ vers plus l'infini lorsque le rayon r tend vers zéro, signifie que pour tout grand réel positif B , il existe un petit rayon $r_0 > 0$, tel que pour tout $r \in]0, r_0[$, la courbure vérifie $\delta(r) > B$, ce qui conduit à introduire l'ensemble des sphères asymptotiques en expansion, qu'on note $\mathcal{B}_h(c)$, définie par la réunion disjointe des sphères $\mathbb{S}(c, r)$ de même centre et de rayon $r \in]0, r_0[$ par

$$\mathcal{B}_h(c) = \bigcup_{0 < r < r_0} \mathbb{S}(c, r). \quad (22)$$

L'ensemble des sphères asymptotiques en expansion $\mathcal{B}_h(c)$ représente toutes les transformations continues d'un élément de base c de l'espace initial \mathcal{E}_i en sphère $\mathbb{S}(c, r)$, pour tout $r \in]0, r_0[$, de courbure proche de plus l'infini. L'ensemble $\mathcal{B}_h(c)$ est une boule ouverte sans centre, définie par une réunion

disjointe des sphères emboîtées de rayon $0 < r < r_0$. Chaque sphère est l'expansion des sphères précédentes de plus petit rayon, et toutes les sphères sont homotopes en raison de la transformation continue par expansion. La limite supérieure r_0 du rayon r de $\mathbb{S}(c, r)$ dépend du choix de la grande constante arbitraire B (si on change B , la limite supérieure r_0 change).

1.6.2. Espace-temps asymptotique en expansion

L'utilisation des sphères asymptotiques de \mathcal{B}_h permet de définir l'espace-temps asymptotique en expansion comme suit :

DÉFINITION 2. – *on appelle espace-temps asymptotique en expansion, et on le note \mathcal{E}_r , l'espace-temps défini par une famille infinie de sphères $\mathbb{S}(c, r)$ de $\mathcal{B}_h(c)$ accumulées, de même rayon r pour tout élément de base $c \in \mathcal{E}_i$.*

PROPRIÉTÉ 3. – *L'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La courbure de l'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r est proche de plus l'infini.*
2. *L'entropie S_h de l'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r est proche de moins l'infini.*
3. *La variation de la fonction d'état due à une transformation d'un espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_{r_1} en un espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_{r_2} , pour tout $0 < r_1 < r_2 < r_0$, est une forme indéterminée .*
4. *La génération d'entropie de la transformation continue d'un espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r pour tout $r \in]0, r_0[$ vers l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 est proche de plus l'infini.*

REMARQUE 3. – *i) La Propriété 3, 3. conduit au fait que, en dépit de l'évolution de la fonction d'état de l'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r vers moins l'infini pour toute transformation continue (expansion) de sphères de rayon $r \in]0, r_0[$, la génération d'entropie se trouve être une forme indéterminée, car chacune des entropies S_{h_2} et S_{h_1} tend vers moins l'infini, c'est pourquoi la variation de la fonction d'état entre deux espaces-temps asymptotiques en expansion distincts \mathcal{E}_{r_1} et \mathcal{E}_{r_2} n'est pas nulle, mais indéterminée.*

ii) Les caractéristiques introduites dans la Propriété 3, traduisent une divergence avant l'apparition de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 , ce qui conduit à définir une singularité, et l'espace des singularités.

iii) Pour plus de détails voir (BEN ADDA 2024).

1.6.3. Singularité, espace des singularités

Il existe de nombreuses définitions différentes d'une singularité liées au formalisme d'application. En mathématiques, la singularité d'une fonction fait référence à un point où la fonction n'est pas définie (un point exclu du domaine de définition de la fonction), en cosmologie une singularité fait référence à l'effondrement de la matière dans lequel les lois de la physique deviennent incompatibles. Une singularité gravitationnelle est un emplacement spatial où le champ gravitationnel devient infini. Par contre dans le cadre de ce travail, la singularité est définie comme suit :

DÉFINITION 3.– On appelle singularité chaque sphère de $\mathcal{B}_h(c)$, pour tout élément de base c de l'espace initial \mathcal{E}_i dont la fonction d'état est définie par

$$S_r(\delta(r)) = -k \ln(\delta(r)), \quad (23)$$

et tend vers moins l'infini, avec k une constante positive arbitraire.

REMARQUE 4.– i) Une sphère de courbure $\delta(r) = \frac{1}{r}$ très proche de plus l'infini, signifie que pour tout $B > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$, la courbure de la sphère $\delta(r) = \frac{1}{r}$ tend vers plus l'infini.

ii) L'ensemble ouvert $\mathcal{B}_h(c)$ donné par (22), pour tout élément de base $c \in \mathcal{E}_i$, représente une archive de la transformation continue d'une singularité (toutes les sphères emboîtées sont homotopes). En effet $\mathcal{B}_h(c)$ est une boule ouverte sans centre définie par une réunion disjointe de sphères emboîtées de rayon $0 < r < r_0$, où chaque sphère est une singularité.

DÉFINITION 4.– On appelle espace des singularités l'espace défini par une accumulation infinie de singularités identiques.

REMARQUE 5.– i) Puisque les éléments de base de l'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r , pour tout rayon $0 < r < r_0$, sont des sous-ensembles de \mathcal{B}_h (donné par (22)) avec une courbure proche de l'infini et une fonction d'état (23) proche de moins l'infini, alors l'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r est un espace de singularités pour tout rayon $0 < r < r_0$.

ii) Chaque élément de base de l'espace initial \mathcal{E}_i est une entité limite quand le rayon de chaque élément de base de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 tend vers zéro (§1.2, 1.), ce qui donne à l'entité limite une topologie proche de celle d'un point, et indique que les éléments de base de l'espace initial \mathcal{E}_i sont extrêmement contractés avec une entropie locale S_i donnée par

$$S_i = \lim_{r \rightarrow 0} -k \ln(\delta(r)) = -\infty, \quad (24)$$

2. Interprétation des premières conditions du Big Bang et origine de la gravité

D'après cette étude, l'espace des singularités est l'espace-temps asymptotique en expansion \mathcal{E}_r , pour tout $0 < r < r_0 \ll 1$, qui modélise l'espace-temps pour la période entre le Big Bang et l'espace-temps primordial observé approximativement après 380 000 ans. La prise en considération de la matière, de l'énergie et du rayonnement au sein de ce modèle permet de déduire un scénario plausible pour l'origine de la gravité, de décrire les premières conditions après le Big Bang, et de déterminer le rôle majeur de l'espace des singularités pour les premières transformations. En effet, le modèle quantifie le début de l'expansion de l'espace-temps comme suit :

2.1. Période de l'espace initial \mathcal{E}_i

La période de l'espace initial \mathcal{E}_i est la période de l'espace avant le Big Bang au cours de laquelle la matière, l'énergie et le rayonnement sont supposés être assemblés. Dans ce modèle, l'espace initial \mathcal{E}_i avant le Big Bang est un espace limite qui se trouve doté d'une entropie proche de moins l'infini et d'une courbure locale proche de plus l'infini, ce qui indique que les éléments de base de cet espace sont extrêmement contractés avec une topologie proche de celle d'un point.

2.2. Période de l'espace des singularités \mathcal{E}_r et origine de la gravité

La période relative à l'espace des singularités est la période qui vient juste après le début de l'expansion de l'espace (le Big Bang). Elle est caractérisée par l'espace-temps des singularités \mathcal{E}_r , pour tout $r \in]0, r_0[$, à courbure locale proche de l'infini (Propriété 3). La prise en considération de la matière et de l'énergie dans ce modèle en expansion conduit à comprendre le rôle majeur de ces premières singularités dans la recombinaison de la matière et de l'énergie après avoir été disloquées par l'expansion simultanée des éléments de base de l'espace initial \mathcal{E}_i .

Nous supposons dans ce qui suit que le temps minimal à l'expansion de l'espace-temps (le temps zéro t_0) débute avec la dislocation de la matière (au Big Bang) lorsque l'espace subit une expansion via l'expansion simultanée des éléments de base de l'espace initial \mathcal{E}_i .

2.2.1. Première période : période d'inflation

La prise en considération de la matière et de toute forme d'énergie dans ce modèle, ainsi que leur future expansion dans toutes les directions avec l'expansion de l'espace-temps, suggère que dans le passé celles-ci étaient assemblées dans l'espace initial \mathcal{E}_i . Puisque que chaque partie finie de l'espace initial \mathcal{E}_i est constituée d'une accumulation infinie d'entités limites avec une topologie proche de celle d'un point, alors, lorsque chaque entité limite (sans dimension) se dilate en sphère de rayon positif simultanément, chaque partie finie de l'espace initial \mathcal{E}_i devient infinie et l'inflation se produit à la première phase de l'expansion de l'espace.

Toute la matière et l'énergie assemblées dans l'espace initial \mathcal{E}_i , subissent une dislocation totale due à l'expansion de l'espace initial via l'expansion simultanée de ses éléments de base, ce qui induit une inflation. De plus cette dislocation instantanée de la matière et de l'énergie induit un mouvement local de la matière disloquée (une quantité de mouvement locale) et un mouvement de récession due à l'expansion de l'espace.

En effet dans cette courte période d'inflation :

1. la dislocation de la matière et de l'énergie est instantanée lorsque l'espace local se dilate via l'expansion simultanée de ses éléments de base depuis une entité limite extrêmement contractée sans dimension avec une topologie proche de celle d'un point pour atteindre une petite sphère de rayon strictement positif.
2. la matière disloquée subit une accélération de la récession de chacun de ses composants dans toutes les directions en raison de l'étirement de l'espace dans toutes les directions.
3. la matière disloquée entreprend un mouvement local du fait de sa dislocation instantanée (sa vitesse locale v devient non nulle) avec la transformation spatiale. Ce mouvement local est différent du mouvement de récession de la matière dû à l'expansion de l'espace.
4. L'espace initial \mathcal{E}_i se transforme en l'espace-temps des singularités $(\mathcal{E}_r)_{r>0}$ pour tout $0 < r < r_0$, où chaque élément de base est caractérisé par une courbure proche de plus l'infini et une entropie proche de moins l'infini.
5. La présence de matière disloquée avec une quantité de mouvement non nulle dans chaque singularité (élément de base) induit une accélération centripète dans chaque singularité donnée par $\gamma_r = v^2 \delta_r$, où v est le module de la vitesse locale induite par la dislocation de la matière et δ_r est

la courbure de chaque élément de base de l'espace. Cette accélération est responsable des changements de direction de la vitesse de la matière disloquée suivant la courbure locale de l'espace. Puisque la courbure de l'espace δ_r est proche de plus l'infini, alors la matière disloquée subit une accélération centripète proche de l'infini dans chaque singularité. Comme l'effet de la gravité et de l'accélération sont indiscernables (principe d'équivalence), la matière subit alors un champ gravitationnel radial local considérable dans chaque singularité.

6. Selon la deuxième loi de Newton, une force doit provoquer cette accélération centripète locale de magnitude $F = mv^2 \delta_r$. Cette force dévie le mouvement linéaire de la matière disloquée suivant la courbure locale de l'espace, et rend possible le mouvement courbe sur chaque singularité. Sans cette force, le mouvement de la matière disloquée resterait linéaire au lieu de dévier suivant la courbure locale de l'espace. Cette force qui provoque l'accélération centripète est une force de frottement sur la matière exercée par la courbure locale de l'espace-temps en transformation continue.
7. L'existence de cette force proche de l'infini au sein de chaque singularité piège la matière localement dans chaque singularité (chaque élément de base) juste après le début de sa dislocation et la répartit uniformément dans l'espace.

L'existence d'une attraction gravitationnelle centripète locale proche de l'infini dans chaque singularité favorise la recombinaison de la matière, en particulier les protons, les électrons, les neutrons et les noyaux atomiques.

2.2.2. Origine de la gravité

La période de l'inflation instantanée due à l'expansion de l'espace, qui a transformé l'espace initial \mathcal{E}_i en l'espace des singularités $(\mathcal{E}_r)_{r>0}$, conduit à la dislocation instantanée de la matière dans l'espace des singularités et révèle l'origine d'une force gravitationnelle centripète dans chaque singularité (grâce au principe d'équivalence entre accélération et gravité). En effet d'après 5., et 6., la force de gravité locale dans chaque singularité, où la matière disloquée est munie d'une quantité de mouvement non nulle, a pour origine le mouvement local de la matière dans cet espace extrêmement courbe.

Dans son mouvement local, la matière disloquée subit une attraction gravitationnelle centripète dans chaque singularité pour dévier son mouvement local linéaire en un mouvement local courbe. L'apparition de la force gravitationnelle rend possible le mouvement courbe dans chaque singularité de l'espace transformé. Ainsi cette force gravitationnelle est une force exercée par l'espace courbe sur la matière en mouvement pour adapter son mouvement à la courbure locale de l'espace. Par contre en l'absence de mouvement local de la matière disloquée (si $v = 0$) dans l'espace, il n'y aura ni force centripète (puisque $F = mv^2\delta_r = 0$), ni accélération centripète (puisque $\gamma_r = v^2 \delta_r = 0$), ni gravité radiale. Ceci nous amène à affirmer que le mouvement local de la matière dans un espace courbe est la cause de l'existence de la gravité locale dans chaque singularité, et donc que : *la gravité existe parce que la matière n'est jamais au repos dans l'espace-temps courbe.*

2.2.3. Transformation de l'espace-temps des singularités

La période relative à l'espace-temps des singularités \mathcal{E}_r (§ 2.2) correspond à la période opaque de l'expansion de l'univers (estimée à 380 000 ans après le Big Bang) au cours de laquelle le champ gravitationnel infiniment grand dans chaque singularité contribue à l'opacité de l'espace et retient les rayonnements

cosmiques. Au fur et à mesure que l'espace-temps \mathcal{E}_r s'étend via l'expansion simultanée de ses éléments de base, la courbure $\delta_r = \frac{1}{r}$ de chaque singularité diminue progressivement pour $0 < r < r_0$, ce qui réduit l'intensité du champ gravitationnel centripète au sein de chaque singularité (puisque $F = mv^2\delta_r$). La matière piégée dans chaque singularité subit alors une force gravitationnelle centripète décroissante au cours de cette transformation continue jusqu'à atteindre une valeur critique (pour $r = r_0$) qui permet à la lumière de s'échapper pour la première fois de chaque singularité, ce qui rend l'univers transparent et révèle la surface de la dernière diffusion d'où provient le fond diffus cosmologique.

Pendant cette période, l'apparition de champs gravitationnels centripètes proches de l'infini dans chaque élément de base (singularité) où de la matière et de l'énergie ont été piégées, favorise la formation des protons, des électrons, des neutrons et des noyaux atomiques. En fonction de l'expansion de l'espace-temps, la force gravitationnelle décroît progressivement dans chaque singularité jusqu'à ce qu'elle atteigne une intensité qui permet aux noyaux de piéger les électrons et de former des atomes.

Lorsque la courbure de l'espace-temps devient finie, les éléments de base primordiaux de l'espace-temps n'ont plus les caractéristiques d'une singularité, sauf dans les interstices où les singularités continuent d'apparaître avec différentes courbures locales proches de l'infini et disparaissent lorsque leur courbure devient finie avec l'expansion de l'espace-temps.

2.3. La période de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1

La période de l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 est la période qui succède à l'espace des singularités \mathcal{E}_r , pour tout $r \in]0, r_0[$ lorsqu'il cesse d'exister (quand $r \geq r_0$), c'est à dire 380 000 ans après le Big Bang. La force gravitationnelle centripète n'est alors plus proche de l'infini dans les singularités, et la matière et l'énergie sont alors libérées et deviennent accessibles à l'observation. La matière libérée apparaît uniformément répartie pour former l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 à l'étape 1.

Ce modèle a été simplifié pour se rapprocher des premières conditions du Big Bang qui ont permis cette distribution uniforme de la matière et toutes formes d'énergie ainsi que sa formation après sa dislocation instantanée. Néanmoins, nous savons que la matière existe dans un espace-temps à 4 dimensions, alors la surface de chaque élément de base de l'espace-temps primordial modélisé \mathcal{E}_1 doit être une distorsion de l'espace euclidien à 4 dimensions, une 3-sphère, et l'espace-temps primordial \mathcal{E}_1 doit être une accumulation infinie de 3-sphères. La matière dans l'espace-temps en expansion $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ subit une force gravitationnelle proportionnelle à la courbure locale de l'espace-temps d'amplitude donnée par la seconde loi de Newton $F = mv^2 \delta_n(r)$, avec $\delta_n(r)$ la courbure locale donnée dans ce modèle par l'égalité (5) où :

1. Le champ gravitationnel au sein de chaque élément de base de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ subit une diminution très lente avec l'expansion de l'espace-temps. En effet, d'après la proposition 1, le champ gravitationnel au sein de chaque élément de base reste invariant sur une courte période de temps entre deux expansions successives et subit une diminution sur une longue période de temps entre deux expansions successives.
2. Les interstices des éléments de base accumulés de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$ sont le lieu de naissance de nouvelles singularités qui s'étendent et disparaissent progressivement avec l'expansion de l'espace-temps. Ces singularités manifestent certaines des caractéristiques des trous noirs (une courbure proche de l'infini et un champ gravitationnel proche de l'infini) qui piègent tout ce qui se

trouve à proximité. La force gravitationnelle proche de l'infini est proportionnelle à la courbure locale et à la vitesse de mouvement de la matière dans ces singularités. Sans matière en mouvement dans la singularité, la force gravitationnelle centripète n'existerait pas malgré une courbure proche de l'infini et une entropie proche de moins l'infini. Chaque singularité dans les interstices dure une période approximativement supérieure à 380 000 ans avant de révéler la matière qu'elle a incubée, puisque selon ce modèle, sa transformation graduelle dépend de l'expansion des éléments de base primordiaux de l'espace-temps $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n>0}$, d'où une différence avec l'expansion des singularités du début du Big Bang.

Ce scénario est obtenu grâce au modèle proposé, dans lequel l'interprétation de l'évolution de l'espace-temps en expansion homogène et isotrope permet de prédire les premières conditions de la transformation de l'espace qui a incubé la recombinaison de la matière après sa dislocation lors du Big Bang, ainsi que sa distribution uniforme.

3. Conclusion

Cette étude présente donc un modèle simplifié d'espace-temps en expansion, compatible avec le principe fondamental de la cosmologie, qui permet d'accéder à la période la plus proche du début de l'expansion de l'espace-temps estimée à 380 000 ans après le Big Bang. Durant cette période, l'univers était opaque car la matière disloquée et toutes formes d'énergies étaient piégées, ce qui a rendu la compréhension des premières conditions de la recombinaison de la matière inaccessible par l'observation cosmologique, et les modèles acceptés ne permettent pas décrire cette période sans ambiguïté.

Malgré sa simplicité, ce modèle conduit à définir un espace-temps asymptotique en expansion, (\mathcal{E}_r) pour $0 < r < r_0$ de l'espace initial \mathcal{E}_i avant le Big Bang. Il permet de décrire un scénario plausible pour cette période opaque grâce à un espace-temps défini par des singularités à courbure locale proche de plus l'infini et à entropie proche de moins l'infini.

La prise en considération de la matière dans ce modèle fournit une interprétation surprenante : la première condition favorable à la recombinaison de la matière et de l'énergie après leur dislocation lors du début de l'expansion de l'espace (le Big Bang) est l'apparition d'un espace asymptotique des singularités, un espace-temps dont tous les éléments de bases ont certaines des caractéristiques des trous noirs comme une attraction gravitationnelle centripète locale proche de l'infini, une entropie proche de moins l'infini, et une courbure locale proche de l'infini.

La transformation de chaque élément de base de l'espace initial \mathcal{E}_i avant le Big Bang (doté d'une topologie proche de celle d'un point) en un élément de base en expansion (à trois dimensions après le Big Bang) induit une accélération instantanée de l'expansion de l'espace-temps (une inflation) avec une récession accélérée de la matière de son espace environnant dans toutes les directions. L'espace-temps se dote alors d'une courbure locale proche de l'infini, ce qui donne naissance à une force gravitationnelle centripète proche de l'infini dans chaque singularité qui comprime la matière et l'énergie piégées localement, et attribue aux singularités de l'espace-temps une propriété d'incubateur doté de certaines caractéristiques des trous noirs. Ce modèle fournit ainsi les premières conditions pendant les premiers instants de l'expansion de l'espace-temps (le Big Bang).

La cause derrière l'apparition d'un champ de gravité proche de l'infini dans chaque singularité, pendant les premiers instants de l'expansion de l'espace-temps (une matière disloquée munie d'une quantité de mouvement non nulle dans un espace-temps de courbure proche de l'infini) dévoile l'origine du champ gravitationnel et suggère que les singularités jouent le rôle d'incubateur pour la recombinaison de la matière et de l'énergie après leur dislocation.

L'espace des singularités dure approximativement 380 000 ans, période pendant laquelle la matière et l'énergie disloquées sont recombinaisonnées, ce qui permet en particulier la formation de particules subatomiques, et plus tard la formation d'atomes lorsque la gravité diminue d'intensité et se rapproche de la valeur critique qui permet aux noyaux de piéger les électrons. Plus les éléments de base de l'espace des singularités s'étendent, moins la courbure locale est importante, et plus l'intensité des champs gravitationnels au sein des singularités est faible. Lorsque la courbure des singularités se réduit suffisamment avec l'expansion de l'espace-temps, les champs gravitationnels diminuent et atteignent l'intensité qui permet à la lumière de s'échapper et de révéler la surface de la dernière diffusion d'où provient le fond diffus cosmologique. Après cette période, l'espace des singularités se transforme progressivement en l'espace primordial \mathcal{E}_1 du modèle introduit dans cette étude.

Le modèle proposé fournit donc un cadre pour :

- étudier le changement de la création d'entropie de l'espace-temps non plus comme un changement d'une fonction d'état basée sur la chaleur (entropie de Clausius) ou basée sur le nombre de micro-états (entropie de Boltzmann), ou basée sur la mesure de l'information (l'entropie de Shannon), mais comme un changement de la fonction d'état basée sur la transformation de la courbure d'un espace-temps en expansion homogène et isotrope qui se dilate simultanément via l'expansion discrète de ses éléments de base.
- justifier l'existence d'une période d'inflation pendant les premières secondes après le Big Bang. Cette inflation est la première transformation d'un espace initial extrêmement contracté \mathcal{E}_i vers l'espace-temps asymptotique en expansion (\mathcal{E}_r) pour $0 < r < r_0$ (l'espace des singularités).
- comprendre la première condition favorable à la recombinaison de la matière et de l'énergie après leur dislocation par le début de l'expansion de l'espace-temps (le Big Bang).
- identifier l'origine du champ gravitationnel au sein de chaque singularité.

Bibliographie

- BEN ADDA F., « Fluctuating paths of least time, Schrödinger equation, van der Waals torque and Casimir effect mechanism » *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18 n° 11 (2021) : 2150182.
- BEN ADDA F., « Space-Time Entropy, Space of Singularities and Gravity Origin : A Case Study » *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2450189 (30 pages), (2024). DOI : 10.1142/S0219887824501895.
- BEN ADDA F., « A Case Study of Closed Universe that Fits the Cosmological Data of Supernovae of Type Ia » *J. Phys.* IOP Publishing : Conf. Ser. 1391 012125, (2019)
- BEN ADDA F., PORCHON H., « Infinity of geodesics in a homogeneous and isotropic expanding space-time » *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13 n° 4 (2016) : 1650048.
- BOLTZMANN L., « Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas molekulen » [Further Studies on Thermal Equilibrium Between Gas Molecules], *Wien, Ber*, 66 (1872) : 275.
- BOLTZMANN L., « Über die Beziehung eines allgemeine mechanischen Satzes zum zweiten Hauptsatze der Warmetheorie, Sitzungsberichte » *K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-Naturwissenschaften*, 75 (1877) : 67-73.
- CLAUSIUS R., « Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie » *Annalen der Physik*, 125 n° 7 (1865) : 353-400.

- CASIMIR, H.B.G., « On the attraction between two perfectly conducting plates » *Proc. K. Ned.Akad. Wet*, 60 (1948) : 793-795.
- EGAN C. A., LINEWEAVER, C. H., « A Larger Estimate of the Entropy of the Universe » *The Astrophysical Journal*, 710 n° 2 (2010) : 1825-34.
- NOJIRI S., ODINTSOV S. D., AND PAUL T., « Early and late universe holographic cosmology from a new generalized entropy" » *Phys. Lett. B*, 831 (2022) : 137189.
- NOJIRI S., ODINTSOV S. D. AND FARAONI V., « From nonextensive statistics and black hole entropy to the holographic dark universe » *Phys. Rev. D*, 105 no.4 (2022) : 044042.
- ODINTSOV S. D., ONOFRIO , S. D., AND PAUL T., « Holographic realization from inflation to reheating in generalized entropic cosmology » *Physics of Dark Universe*, V 42 (2023) : 101277.
- YOUNG T., « The Bakerian lecture : On the theory of light and colours » *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 92, p 12-48, (1802).
- SHANNON C.E., « A Mathematical Theory of Communication. Bell Syst » *Tech. J.*, 27 n 3 (1948) : 379-423.
- SHANNON C. E., « A Mathematical Theory of Communication » *Bell Syst. Tech. J.*, 27 n 4 (1948) : 623-656.