# La fonction zêta de Riemann ou l'ombilic des mathématiques (II) : à propos des fondements

## The Riemann zeta function or the umbilicus of mathematics (II): about the foundations

Philippe Riot[1]

[1] Laboratoire SCIQ, ESIEA Numérique et Société, 9 rue Vésale, 75005 Paris, France. philipperiot@zetainnovation.com

**RÉSUMÉ.** Attendu le développement de la première partie 1 la sentence attribuée à Héraclite « εν και παν » soit « *l'un est tout* » mérite que l'on s'y arrête. La signification fonction zêta de Riemann $\zeta$ émerge en recourant à une lecture ordinale de cette fonction. Cette lecture est fondée sur une approche catégorique. Dans ce cadre, il s'avère important de compléter les axiomes de base attachés à la théorie des ensembles sous contraintes ZFC (Zermelo-Fraenckel avec l'axiome du Choix) afin de préciser et de caractériser le rôle du cardinal du continu. La définition même de la fonction $\zeta$ justifie que l'on retienne pour ce faire, l'axiome de Martin. Il permet de prolonger les règles de la combinatoire infinie nécessaire à la définition du statut de la fonction zêta au-delà du seuil du plus petit ordinal indénombrable. Il s'agit de axiome de forcing le plus simple évitant tout argument de nature métamathématique. Il s'avère alors que celui-ci se reformule de manière équivalente comme l'énoncé de Riemann sur la distribution de ses zéros non triviaux.

**ABSTRACT.** Whereas the part 1 sentence attributed to Heraclitus « εν και παν » is a whole merit of being revisited. The significance of the Riemann zeta function $\zeta$ emerges using an ordinal reading of this function. In this context, it is important to complete the basic axioms attached to ZFC set theory (Zermelo-Fraenckel with axiom of choice) in order to precisely characterize the cardinality of the continuum. The very definition of the function justifies retaining Martin's axiom (allowing the rules of infinite combinatorics to be extended beyond the threshold of the smallest uncountable ordinal), the simplest forcing axiom which avoids any argument from metamathematical nature. It then turns out that this is reformulated in an equivalent way like Riemann's statement on the distribution of its non-trivial zeros.

**MOTS-CLÉS.** Fonction Zêta, Catégories, Feuilletage, Filtrage, Interpolation.

**KEYWORDS.** Zeta Function, Category theory, Covering, Filtring, Interpolation.

### *Note des coordinateurs du projet Lîla-Entropie*

*On ne s'étonnera pas de l'importance théorique ici accordée dans ce volume 2 du projet à la fonction zêta de Riemann. On sait en effet que de nombreuses études tant théoriques qu'empiriques montrent qu'il existe un lien étroit entre l'entropie qui caractérise les systèmes dynamiques opérant dans les environnements complexes et intriqués [KEJ00] [LMA10] [RIP17-19] tant avec la structure multi échelle de la fonctions zêta caractérisée par une double autosimilarité (a,1/2) par exemple avec ½<a<1 qu'avec la surface de Riemann qui lui est associée. Ces liens induisent en effet des corrélations Locale-Globale et des relations cohomologiques [BAP15] [VIP10], dans la définition de la fonction d'état appelée entropie. Cette fonction explicite en effet en termes combinatoires, le rapport entre un k-état d'incertitude au sein d'un ensemble plus grand que k. La situation est assez simple si le système est fermé sur un état de référence $k_{ref}$ dénombrable qui peut être assimilé à un tout réductible à une unité (théorie des probabilités, théorie des jeux). Mais l'analyse devient délicate lorsque $k_{ref}$ s'ouvre sur l'infini. Le chapitre 2 du travail de Philippe Riot, développe dans le détail l'implication du rapport de la fonction zêta à l'infini et au concept de forcing ensembliste en combinant de manière paradoxalement ordonnée le dénombrable et le continu. Cette démarche débouche soit sur un système fermé (Mécanique Quantique) soit sur des ensembles ouverts-fermés conjointement (clopen). L'importance pratique et universelle de la fonction zêta et du forcing sera montrée ultérieurement, par le truchement d'un exemple de dynamique fractionnaire archétypal, car l'ouverture conduit alors assez naturellement à la notion d'anti entropie (voir les travaux de Guiseppe Longo). Philippe Riot s'attache dans l'étude qui suit à la structure des infinis auxquels les physiciens se confrontent en pratique dans les systèmes dynamiques. Les responsables du projet Lîla-Entropie, en accord avec les éditeurs, ont été conduits à restructurer les notes initiales de P. Riot et à ajouter des*

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

*notes en bas de pages des italiques etc afin que ses analyses soient accessibles à un lectorat peu familier avec les subtilités attachées à la topologie, à la théorie de la mesure, à la théorie des nombres et moins encore à la théorie des catégories. Il assume donc la responsabilité de confusions éventuelles que l'expert en mathématique saura rectifier sans difficulté pour retrouver l'exactitude de la pensée de l'auteur si, par mégarde, elle avait, dans cette réorganisation, été déformée pour des raisons d'intelligibilité physique.*

## 1. un chemin de pensée visant à dégager la signification de la fonction zêta de Riemann.

1.1 – La fonction zêta de Riemann, notée $\zeta$ s'interprète en s'appuyant sur les travaux de G.-C. Rota [ROC64] comme une *fonction caractérisant les intervalles* dans une structure d'ordre partiel. Cette interprétation est explicite en particulier pour l'ensemble des entiers naturels muni de la relation d'ordre de divisibilité, celle-ci étant directement issue de la structure multiplicative qui lui est canoniquement associée. On observera que cette interprétation a, comme il a déjà été indiqué, été généralisée en termes de structures catégoriques, en particulier par Lawvere [LAW97-10]. La « flèche » étant avec « l'objet » un des ingrédients de la théorie des catégories [LET14] et celle-ci ayant vocation à relier deux objets, la question de la décomposition des flèches Dans une ensemble infini de flèches possibles [LET22] se pose naturellement. En théorie des catégories cette décomposition opère au travers une règle dite loi fondamentale de composition de flèches (lois fondamentales caractérisant précisément la structure de catégorie). Comme il a été indiqué dans la partie 1 de cet article, la fonction $\zeta$ doit se lire comme le dénombrement des flèches dites élémentaires, c'est-à-dire des flèches qui après fractionnement ne sont plus décomposables. Le dénombrement des flèches s'effectue au travers d'une somme alternée, opération qui, en d'autres termes, revient à dénombrer les objets qui s'intercalent entre deux objets donnés en tant qu'étapes selon les cheminements permis par les flèches reliant deux objets extrémaux. Le passage du décompte des flèches au décompte des objets intercalés, gauche et droite étant distinguées, impliquant précisément la nécessité d'un décompte alterné, est la manifestation du passage à une structure dite graduée. Il s'explique très simplement en faisant appel au principe de base de la combinatoire qui s'appelle le principe d'inclusion-exclusion sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

Si nous lisons de manière ordinale un entier quelconque « *n* », celui-ci s'identifie à l'ensemble de ses prédécesseurs, soit $n = \{1, \ldots, n-1\}$. Notons immédiatement que cette définition crée une correspondance entre un élément de l'ensemble infini dénombrable noté « $\omega_0$ » et un sous-ensemble, que l'on appelle segment initial. Par ailleurs, la construction du même monoïde $\mathbb{N}$, puisqu'il s'agit de cela, fait intervenir l'ensemble de ses successeurs, ou segment terminal, qui relie le même élément au point à l'infini : « $\infty$ ».

*Lecture ordinale*. La définition précédente se généralise pour des ordinaux donc au-delà du dénombrable. L'idée directrice consiste alors à substituer à l'ensemble infini dénombrable « $\omega_0$ » des sous-ensembles ordonnés, et au point « $\infty$ » des ordinaux de plus en plus grands. Cette extension est rendue possible jusqu'à atteindre la puissance du continu, en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. De manière intuitive cela consiste à remplacer le segment terminal de départ qui représente la flèche reliant l'entier naturel courant « *n* » au premier ordinal limite, par une flèche comprenant une quantité de plus en plus grande de points (ou d'objets *pour rester dans les catégories* !) intermédiaires et le reliant non plus au plus petit ordinal limite correspondant à « $\infty$ », mais au premier ordinal limite indénombrable « $\omega_1$ » et au cardinal [HSW99] associé au continu **c**. *Comme il a été indiqué dans la note 1 l'énumération des points intermédiaires définit alors la fonction* $\zeta$. De manière intuitive l'entier, élément générique de $\mathbb{N}$, est appréhendé depuis l'infini continu **c** au travers d'une flèche qui collige une infinité d'éléments ayant la puissance du continu et qui explicite l'ensemble de ses successeurs dans l'échelle ordinale. Cette flèche n'est évidemment pas « réelle », au sens où elle serait paramétrée par une variable appartenant au corps des réels, mais complexe, au sens où elle exige, du fait de l'isomorphisme utilisé $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, un paramétrage utilisant une variable évoluant dans le plan complexe et un traitement diagonal imposé par la mise en œuvre du continu (voir procédure de la Diagonale de Cantor). Même si cet aspect ne sera pas développé dans la présente note, il est important de noter, que cette flèche peut être assimilée à l'intervalle réel fermé $[0,1]$, équipé d'un axe transversal. Ce dernier introduit dans la problématique une homotopie non triviale, conduisant à la possibilité de refermer la flèche pour former une boucle. Il est alors possible de l'associer soit à un cylindre, soit un ruban de Möbius et autres [FRT04]. Cette opportunité n'est absolument pas anecdotique, mais rend compte de facultés topologiques profondes, -typiquement l'existence irréductible de caractéristiques structurales d'origine topologiques-, à l'instar des trous de Hausdorff, dès que l'on franchit le seuil du plus petit ordinal indénombrable « $\omega_1$ ». Ce constat ouvre la perspective d'associer à l'approche de la fonction $\zeta$ que nous développons, une lecture cohomologique de son statut mathématique.

*Lecture topologique*. Il est également utile d'appréhender une seconde lecture de la construction précédente. A un entier « $n$ » est associé le sous-ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$. Ce dernier peut être vu comme ouvert, au point « $\infty$ ». Il est ainsi attaché à une collection de sous-ensembles fournis par tous les segments terminaux des entiers finis qui le précèdent. *D'un point de vue topologique cette collection constitue un recouvrement ouvert*. Cette approche peut être étendue aux étapes ultérieures en considérant les ordinaux limites. En d'autres termes, la construction généralisée met en jeu de manière systématique une double description, avec d'un côté (i) des ouverts représentant des segments initiaux donc des objets énumérables et séparables, et de l'autre côté (ii) des ouverts rattachés à des ordinaux limites constituant collectivement des recouvrements, appelant par ailleurs des propriétés de compacité afin d'en extraire une information synthétique, *in fine* représentable, donc en nombre finie. Notons que le schéma qui consiste à associer à la topologie d'un ensemble de points *la structure algébrique en treillis des ouverts*, ou encore *des recouvrements*, est classique depuis les travaux de Marshall Stone[1]. On établit de la sorte *une dualité entre structure de points et structure de recouvrements*. La situation que nous venons de décrire brièvement se réduit à deux types de *couples :* (i) *séparation/recouvrement* (techniquement de type Lindelöf)[2], et (ii) *connexité/compacité*. Un tel contexte fait émerger une structure classique en topologie et analyse fonctionnelle, rattachée au théorème de Baire[3]. C'est à cette double intersection que réside la clé de compréhension du statut d'intermédiation (Figure 1) de la fonction $\zeta$ indiquée en partie 1.

---

[1] En topologie, un espace de Stone est un espace topologique compact qui est « le moins connexe possible », au sens où l'ensemble vide et les singletons sont ses seules parties connexes. Comme c'est le cas pour tout espace topologique, l'algèbre des ouverts-fermés (ouvert dont le complément est ouvert) d'un espace de Stone est une algèbre de Boole. Inversement, le théorème de représentation de Stone pour les algèbres de Boole établit que toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre des ouverts-fermés d'un espace de Stone. Ceci établit une équivalence entre la catégorie des algèbres de Boole et la catégorie des espaces de Stone, qui est un cas particulier de dualité de Stone. On trouvera une description précise de ce foncteur contravariant dans l'article consacré au théorème de représentation. Marshall H. Stone, « The Theory of Representations of Boolean Algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.*, n° 40, 1936, p. 37-111

[2]Un espace de Lindelöf est un espace topologique dont tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement dénombrable. Il s'agit d'un affaiblissement de la quasi-compacité, dans laquelle on demande l'existence de sous-recouvrements finis. Un espace est dit héréditairement de Lindelöf si tous ses sous-espaces sont de Lindelöf. Il suffit pour cela que ses ouverts le soient.

[3] Théorème de Baire en topologie générale et en analyse fonctionnelle. Il affirme qu'un espace topologique est de type Baire si l'intersection dénombrable de recouvrements d'ouverts denses est également dense.

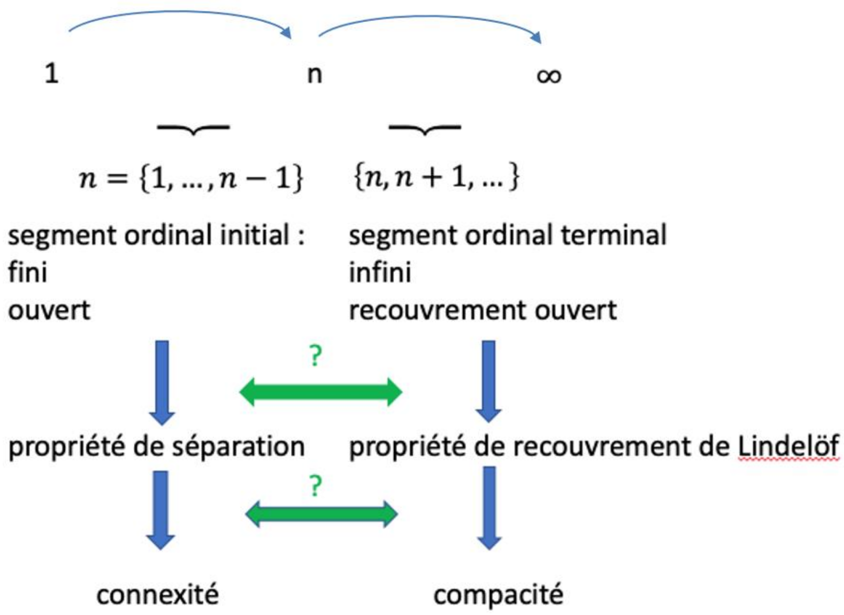



**Figure 1.** *Approche que nous qualifierons de catégorielle de l'ensemble des nombres naturels permettant de cerner la signification de la connexité et de la compacité et au-delà des propriétés de séparation et de recouvrement.*

1.2 – L'addition induisant la multiplication par itération (procédé inductif de base) l'ensemble $\mathbb{N}$ possède une double structure : comme (i) monoïde additif et comme (ii) demi-anneau. Le rôle déterminant des multiples ensembles permis par la présence des entiers premiers s'en déduit de même que la notion d'idéal et de filtre. La multiplication tient en pratique le rôle d'opérateur d'intersection (produit cartésien). D'un point de vue catégorique une intersection entre deux ensembles fait office de flèche les reliant entre eux. Pour reconstituer globalement le concept de catégorie il faut encore disposer, -à côté de *la notion d'objet* engendrée par *la structure de monoïde additif* et de *la notion de flèche* apportée par la décomposition en produit de puissances d'entiers premiers-, *de la notion de Transformation Naturelle*[4]. Cette dernière notion est fondamentalement de nature homotopique, ou homologique[5]. Il en résulte qu'un troisième étage structurel va être fourni par *le concept de filtre*[6], en particulier par *le mécanisme de prolongement de fonction faisant jouer un rôle aux infinis*. Le mécanisme de construction d'un filtre adapté devant respecter certaines conditions locales y compris aux limites, introduit de fait *la technique de forcing [COP02]*[7].

1.3 – la lecture catégorique de $\zeta$ telle que restituée dans le premier article a mis en évidence la présence sous-jacente du diagramme (cône) impliquant le foncteur diagonal [LET14] et une double adjonction, qui trouvent leurs équivalents exacts dans le cadre ordinal avec *les notions importantes d'ordinal limite et de cofinalité* (pour un cardinal $\tau$ la cofinalité, notée $cf(\tau)$, est le plus petit cardinal $\lambda$

[4] Soit un morphisme de morphismes.

[5] N'oublions pas que le concept de catégorie a été initialement introduit pour appréhender de manière mieux structurée les calculs de classes d'homologie en partant des transformations d'homotopie transcrites en termes de transformations naturelles dans le nouveau cadre ainsi créé

[6] Un filtre définie sur un ensemble ordonné X est une structure qui, s'appuyant sur les sous ensemble de X, permet de généraliser à toute catégorie ordonnée la notion de limite d'une suite. La notion d'ultrafiltre est fondamentale car un tel filtre n'est contenu dans aucun filtre plus grand (on peut ainsi par exemple concevoir des nombres non standards à partir de la notion d'ultra-produits catégoriques). *Filtre* (mathématiques) — Wikipédia (wikipedia.org). *Forcing* (mathematics) - Wikipedia (wikidedia.org).

[7] Par le forcing, (Wikipédia) on cherche à montrer qu'une assertion donnée est cohérente avec les axiomes ZFC (Zermelo-Fraenkel plus axiome du Choix) de la théorie des ensembles ou une de ses extensions. Une façon d'interpréter cet argument est de supposer ZFC cohérente et de l'utiliser pour démontrer la cohérence de ZFC + cette assertion. Chaque condition de forcing est un ensemble fini d'informations, l'idée étant que seuls ces ensembles finis sont pertinents pour des démonstrations de cohérence, puisque d'après le théorème de compacité, une théorie possède un modèle si chaque sous-ensemble fini de ses axiomes en a un. On peut donc choisir un ensemble infini de conditions pour étendre un modèle de la théorie des ensembles, il suffit de vérifier la cohérence condition par condition, puis, déduire de la cohérence de la théorie des ensembles, la cohérence de la théorie étendue par cet ensemble infini de conditions.

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

tel que l'ensemble de valeur cardinal $\tau$ peut être représenté comme union d'une famille de cardinal au plus $\lambda$ pour des ensembles de cardinal inférieur à $\tau$. Par ailleurs, nous avons déjà indiqué qu'il y a incompatibilité d'un point de vue topologique entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ en termes de connexité, avec néanmoins des liens en termes de séparabilité et de propriété de type Lindelöf. Ceci conduit à établir une claire distinction entre la complétude à la Dedekind aboutissant à ($\mathbb{R}$ ≤) et ($\mathscr{P}(\omega) \subseteq$ ) qui est naturellement lié à la construction des ordinaux et donc à ζ. Après avoir reindiqué que « ω » exprime l'infini non dénombrable, on peut rappeler que *la fonction ζ réalise une surjection de type* $\mathfrak{c} \to \omega$ ou $\omega_1 \to \omega$ . ζ introduit ainsi explicitement la question de la connexité dans la problématique. Comme nous travaillons essentiellement avec des *espaces munis d'un bon ordre*, la seule propriété topologique acquise assurément est la « *normalité* ». En particulier, nous pouvons affirmer qu'il existe un défaut de compacité, ou de manière plus précise, un défaut de paracompacité, sur certains sous-ensembles particuliers appelés ensembles stationnaires. Il est alors nécessaire de faire appel à un résultat classique et important appelé *lemme de Fodor ou lemme du pressoir*, qui généralise un résultat antérieur établi par Alexandrof et Urysohn [ARL79], lemme exprimant l'idée simple liée directement à la connexité selon laquelle la surjection d'un ensemble indénombrable sur $\omega_0$ entraine nécessairement la projection de presque tous les points sur un même élément, autrement dit *la surjection est in fine constante*. Ce fait se révèle fondamental car il permet d'expliquer pourquoi on peut substituer à un domaine K du plan complexe une structure ordinale et pourquoi la fonction ζ doit être appréhendée essentiellement comme une entité ordinale, autrement dit on ne décrit pas le plan complexe en se référant à la topologie usuelle qui est une topologie métrique($\mathbb{R}$ ≤), mais en se référant à un bon ordre et à la structure ($\mathscr{P}(\omega)$ $\subseteq$ ) qui admet des suites de longueur « $\mathfrak{c}$ » Toutefois cette observation soulève immédiatement la question du modèle de continu. En effet, ce dernier est indéterminé dans la théorie des ensembles classique qualifiée par les axiomes de ZFC.

1.4 – les constructions mises en jeu pour construire ζ reposent à la fois sur *le couple discret/continu* qui se rattache à *la notion de connexité* et *le couple fini/infini* qui débouche sur *le concept de compacité*. Il est alors opportun de comprendre *la propriété de continuité d'une fonction comme la préservation conjointe des deux propriétés de connexité et de compacité* [MEE70] [GJS01] Ce lien relève d'un théorème général établi par la mathématicienne Evelyn McMillan [MME68]. Il est également pertinent de relever qu'en dernière analyse, la formalisation de la continuité fait par exemple intervenir le critère de convergence de Cauchy, mais encore le concept catégorique de (co)limite pondérée, concept qui s'appuie en dernier ressort sur l'équivalence $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

1.5 – Dans le cadre des algèbres de Boole, en faisant référence à un résultat classique appelé lemme de Rasiowa-Sikorsk [RAH14] il est possible de lire la fonction ζ comme la formalisation d'une forme affaiblie de l'axiome de Martin, de telle sorte qu'il devient alors naturel d'en appeler à cet axiome pour compléter la théorie ZFC. L'axiome de Martin [TOS89] [TVB87], dans sa forme complète, peut aussi être formalisé soit (i) par une équivalence héréditairement stable entre *séparabilité à gauche* (qui est une reformulation de la propriété de recouvrement ouvert de type Lindelöf voir ci avant) et *séparabilité à droite* (qui est une reformulation de la propriété de séparabilité classique), soit (ii) par le truchement de la dualité de Baire entre *description par énumération* de points et *propriété de recouvrement ouvert* [OXJ80], grâce à un résultat établi par Todorčević et Velikočvić[8]. Ces considérations conduisent à donner un sens profond à une formulation due à Bagchi par ailleurs en lien avec le théorème d'universalité de la fonction ζ établi antérieurement par Voronin [VOS75]. L'ensemble de ces

[8] Todorčević est un des plus brillant mathématicien de sa génération. Il a apporté une contribution majeure à l'étude des espaces S et L en topologie, a prouvé un remarquable théorème de classification pour les relations transitives sur le premier ordinal non dénombrable noté $w_1$ ci-dessus ,a fait une étude approfondie de sous-ensembles compacts des fonctions de classe 1 de Baire, Fremlin, Talagrand et d'autres dans la théorie spatiale de Banach. Parmi les réalisations récentes les plus frappantes de Todorčević (et des co-auteurs) figurent des contributions majeures aux problèmes de von Neumann et de Maharam sur les algèbres booléennes, la théorie des espaces non-séparables de Banach, y compris la solution d'un vieux problème de Davis et Johnson Solution d'un long problème de Laver et le développement d'une théorie de dualité reliant la théorie de Ramsey finie et la dynamique topologique.

considérations conduisent à concevoir *une équivalence entre l'axiome de Martin et l'énoncé de la « conjecture » de Riemann*.

1.6 –il est toutefois intéressant de montrer que la fonction ζ, qui, comme souligné précédemment, explicite l'axiome de Martin, n'en dépend pas directement pour sa construction. Examinée dans le cadre des algèbres de Boole [KOS00], la fonction ζ s'interprète comme *le prolongement au cas infini de la distributivité* reliant l'addition et la multiplication arithmétiques. Il s'avère que *ce prolongement est toujours réalisable* ; la manière la plus synthétique de le vérifier consiste à construire *un modèle booléen comme technique de forcing* élémentaire et d'exploiter une fois encore l'isomorphisme fondamental $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, cette fois étendu à tous les cardinaux κ soit $\kappa \times \kappa \cong \kappa$.

1.7 – globalement, la fonction ζ accompagnée par l'adoption de l'axiome de Martin, autrement dit par la validité de l'énoncé de Riemann portant sur la distribution de ses zéros non triviaux selon l'axe d'abscisse ½, fournit un modèle du continu caractérisé par deux propriétés fondamentales, (i) un continu paramétrable non pas par une variable réelle, mais par une variable du plan complexe, et (ii) une possibilité de classer les objets de la catégories (points de la fonction) de manière arithmétique. L'adoption de l'axiome de Martin s'interprète alors de la manière suivante : *alors que le couple de classement grossier « petit / grand » est initialement représenté par le couple formé d'un entier quelconque « n » et de l'ordinal infini dénombrable minimal « $\omega_0$ », ce couple est utilement remplacé par un nouveau couple formé par un ensemble de mesure de Lebesgue nulle et par l'ordinal représentant le continu c*. La fonction ζ fournit alors en quelque sorte une décomposition du modèle du continu selon l'échelle des ordinaux, en proposant une structure orthogonale à la structure topologique naturelle, de type métrique, de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$. Ce fait est au demeurant restitué au plan analytique puisque la fonction ζ est représentée par une série de Dirichlet $\sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a_n n^{-s}}$, alors que la structure métrique naturelle du plan complexe est restituée naturellement par l'anneau des fonctions analytiques représentables par des séries polynomiales $\sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{a_n s^n}$. Cette superposition de deux structures distinctes se rattache à la distinction entre les deux structures d'ordre précédemment indiquée à $(\mathcal{P}(\omega) \subseteq)$ et $(\mathbb{R} \leq)$ respectivement. Le théorème de Voronin fournit les conditions de rapprochement asymptotique des deux structures. Ce constat induit d'importantes conséquences tant d'ordre mathématique, que dans le domaine de la physique et tout particulièrement dans la justification de l'adoption du formalisme quantique[9] mais pas seulement [LMA10] . En conclusion et de manière assez contre intuitive, le modèle le plus naturel, et le plus pertinent pour une approche formelle du continu n'est pas seulement fourni par la droite réelle, mais bien davantage et plus profondément par la fonction ζ !

## 2. Développements techniques :

Les énoncés qui ont été rapportés dans la synthèse ci-dessus doivent, pour être justifiés, être développés selon cinq étapes :

1. Un rappel sur la théorie des ordinaux avec un accent mis sur les notions clés d'ordinal limite, de cofinalité et d'ensemble stationnaire toutes notions conduisant au lemme de Fodor
2. Une compréhension de la continuité d'une fonction en tant que préservation de la connexité et de la compacité
3. Une introduction de l'axiome de Martin à partir du contexte booléen et rapprochement avec le théorème classique de Baire

[9] N. Snaith, "*Random Matrix and zeta function*", Doctoral Thesis published with J. Kaiting in Comm.in Math. Physics, 214, (57-89), 2000.) les auteurs utilisent les matrices aléatoires de la mécanique quantique pour modéliser les propriétés de la fonction zêta sur la droite critique.

4. L’interprétation de la fonction ζ comme expression de la distributivité infinie permise grâce à une construction relevant du forcing
5. Une reformulation équivalente de l’axiome de Martin due à Todorcevic-Velickovic qui débouche sur une équivalence avec l’énoncé de Riemann par le truchement de résultats concernant ζ établis par Serguei Voronin et Bhashar Bagchi.

Au terme de l’analyse la fonction ζ apparaîtra comme un objet à la fois topologique et ordinal. Toutefois avant d’entrer dans les détails, il paraît opportun de rendre compte des facteurs qui ont guidé notre étude de la fonction ζ, en notant que sa construction même concentrait de nombreuses propriétés relevant de plusieurs domaines mathématiques, s’articulant d’une manière remarquablement cohérente. Rappelons d’abord que la topologie est la branche des mathématiques permettant d’étudier la notion de continuité. Une configuration topologique consiste en un ensemble quelconque dans lequel il existe une relation de proximité reliant les éléments de cet ensemble avec certains sous-ensembles et respectant certains axiomes. La structure ordinale sur laquelle est bâtie ζ fournit une telle relation de proximité, par le truchement de la notion de cofinalité, traduction du concept catégorique d’adjonction, qui se manifeste essentiellement aux ordinaux limites qui correspondent à la présence du foncteur diagonale. Les notions fondamentales de topologie à prendre en compte sont les suivantes :

- *La connexité* permettant de distinguer les cas de présence d’un objet unique ou de plusieurs objets fermés distincts,
- *Les conditions de dénombrabilité* ($1^{\text{ier}}$ et $2^{\text{ième}}$ axiomes de dénombrabilité, séparabilité, condition de Lindelöf) associées à la capacité d’énumérer et de nommer individuellement les éléments manipulés,
- *La notion de séparation* (Hausdorff, régularité, normalité) qui permet (i) soit de distinguer des points différents par des ouverts disjoints par des prédicats logiques différents, (ii) soit des éléments et des fermés, ou encore des fermés distincts entre eux par des voisinages disjoints,
- *La compacité* qui, d’une manière générale et intuitive, consiste à ramener l’infini au fini [CHG92].

Toutes ces notions sont en fait mises en jeu à travers ζ. Soulignons qu’il existe de multiples expressions de la compacité, la plus importante étant celle de paracompacité (la finitude cherchée est alors seulement locale), et que c’est cette dernière qui est fondamentalement exprimée à travers cette fonction. Selon un résultat célèbre de Stone, dans la classe des espaces topologiques $T_2$, la paracompacité est équivalente à la métrisabilité, autre notion fondamentale ainsi implicitement mise en jeu par la fonction ζ.

Nous observons plusieurs faits se rapportant directement à la construction de la fonction ζ qui mettent en évidence le lien existant entre cette fonction et l’expression d’une formulation d’un axiome important de la théorie des ensembles et de la technique du forcing.

### 2.1. *De la théorie des ordinaux à l’axiomes de Martin*

2.1.A) Comme nous l’avons vu la fonction ζ consiste à agréger de multiples copies de $\mathbb{N}$ en exprimant la factorisation en produit de puissances entières des entiers premiers. Cette structure admet une représentation linéaire, comme espace de Banach admettant une base de vecteurs deux à deux disjoints en correspondance biunivoque avec les entiers premiers [RIP17]. L’argument complexe sert de scalaire fixant une échelle de représentation. La formulation additive de ζ consiste à *énumérer de manière disjonctive*, tandis que la formulation multiplicative de ζ consiste à *parcourir de manière conjonctive* les sous-espaces linéaires de dimension 1 correspondant aux différents vecteurs de base associés aux entiers premiers. Les entiers premiers se distinguent en effet dans la structure d’ordre engendrée par la loi de multiplication par *le fait qu’ils constituent une anti-chaîne* puisqu’ils sont incomparables entre eux. Le changement d’échelle conduit à ce que les points soient engendrés en plus grand nombre, jusqu'à atteindre une quantité indénombrable dès lors que le balayage d'un domaine du plan complexe selon un certain bon ordre, dépasse le premier ordinal indénombrable $\omega_1$, sachant que dans la représentation multiplicative les points se répartissent selon la seule famille dénombrable des sous-espaces de dimension 1 formant la base de l'espace de Banach.

2.1.B) Comme cela a été décrit ci avant (§1.5), chaque entier « n » considéré comme élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{N}}$ est représentable comme un couple d'ensembles $\langle I, A \rangle$ avec $|I| < \aleph_0$ et $|A| = \aleph_0$. Dans une perspective catégorique, l'élément ajouté correspond à un objet terminal « $\infty$ ». Le procédé implique une compactification de type Alexandroff en un point de $\mathbb{N}$, noté $\bar{\mathbb{N}}$. Le couple d'ensembles représente le couple de flèches initiale et terminale de l'objet $n$. Il vient alors qu'en disposant de multiples copies de $\mathbb{N}$ en se plaçant *en un point représentant à une certaine échelle l'entier* $n$, il est désormais possible d'attacher une multitude de représentants des flèches initiales et finales. Cette situation appelle la mise en place d'une structure adéquate parmi le collectif des couples d'ensembles $\langle I, A \rangle$ permettant d'agréger ces nouveaux objets. Si une échelle donnée est choisie ainsi que deux entiers $n < m$, deux couples $\langle I, A \rangle$ et $\langle J, B \rangle$ entrent en jeu que l'on peut ordonner naturellement: par exemple $I \subseteq J \subseteq I \cup A$ et $B \subseteq A$. Cet ordonnancement est illustré dans la figure suivante :

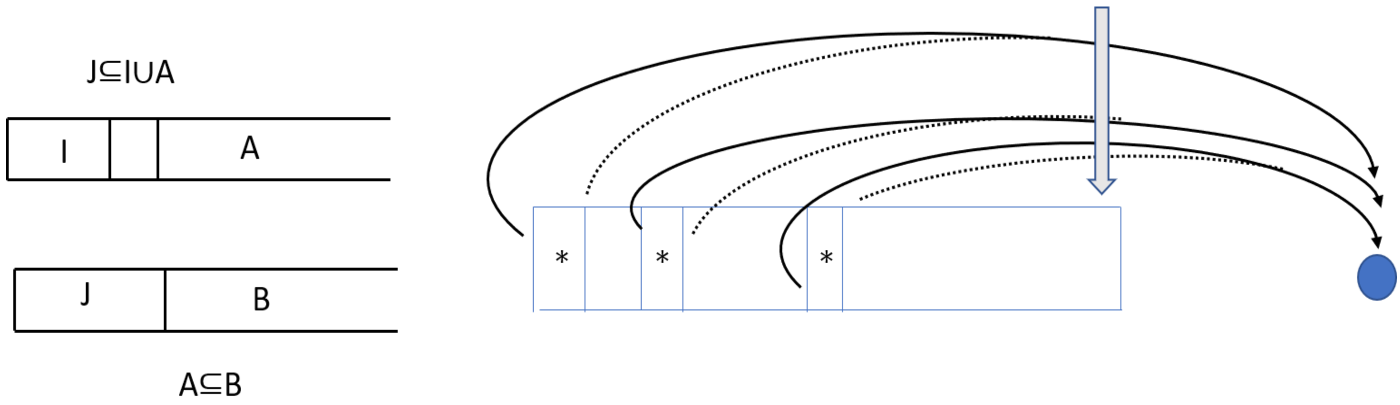



**Figure 2.** *Représentation schématique de l'ordonnancement naturel des flèches finales dans des collectifs de couples d'ensembles.*

Dès lors que les différentes échelles sont disponibles il est judicieux de généraliser cette relation d'ordre. De manière intuitive le changement d'échelle correspond à *un changement de densité* des ensembles de flèches construit en particulier à partir des flèches terminales.

2.1.C) la propriété d'autosimilarité multiplicative de $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} x \mathbb{N}$ peut être formulée de multiples manières, parmi lesquelles il est pertinent de focaliser l'attention sur la formalisation suivante. Soient deux ensembles infinis dénombrables $A_0, A_1$, on peut y associer la représentation géométrique dans laquelle les éléments des deux ensembles sont identifiés à des points disjoints distribués selon deux droites qui se coupent en un unique point d'intersection. En exploitant l'isomorphisme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ on substitue à cette représentation géométrique initiale une nouvelle représentation dans laquelle les deux droites sont remplacées par deux plans euclidiens comprenant les deux familles dénombrables avec la contrainte supplémentaire que les deux plans se coupent selon une nouvelle droite, par exemple orthogonale aux deux droites initiales $A_0 \cap A_1$. Cette situation rend alors compte du fait que l'intersection des deux ensembles initiaux est également infinie dénombrable.

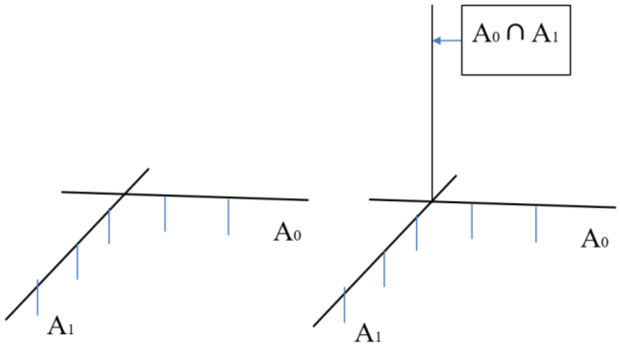



**Figure 3.** *Représentation schématique de l'extension de l'autosimilarité quadratique à l'intersection de couples d'ensembles.*

Il devient clair que cette construction se généralise par la considération d'une famille finie de tels ensembles dénombrables, puis dans une seconde étape, on peut envisager des représentations d'ensembles dénombrables à de multiples échelles. Pour permettre de rendre compte de cette configuration pour une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ vérifiant également $A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n$ , avec famille infinie quand $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, il convient de construire un espace linéaire avec un nombre suffisant d'axes indépendants. Tant que l'on demeure dans le dénombrable, cette construction est réalisable en se référant à un unique ensemble infini dénombrable $I \subseteq \mathbb{N}$ tel que $I \setminus A$ est fini pour tout $A \in \mathcal{A}$. Ainsi apparaît un espace de représentation qui est semblable à celui qui s'attache naturellement à $\zeta$ (RIP17). Cela suggère que cette configuration demeure valide même si la famille $\mathcal{A}$ avec $|\mathcal{A}| < \kappa$ où $\kappa$ est un ordinal indénombrable. Toutefois, il apparaît alors une difficulté : *comment garantir l'existence d'un ensemble dénombrable $I$ à partir d'une famille indénombrable ? La question est ici ouverte.*

Puisque les ensembles $A_i$ appréhendés comme des dualités ouverts-fermés peuvent être identifiés à des prédicats, il est intéressant de fournir une interprétation logique de la situation. Le contexte consiste à disposer d'un collectif de prédicats de grande taille avec pour propriété caractéristique que chaque conjonction d'un nombre fini quelconque de prédicats est satisfaite par une assemblée infinie dénombrable d'éléments, d'objets ou encore d'événements (dans le cadre d'une modélisation de processus physiques), il s'agit alors de pouvoir décréter qu'il existe une unique assemblée infinie dénombrable satisfaisant presque sûrement tous les prédicats du collectif au sens où pour chaque prédicat *seule une sous-assemblée finie ne le vérifie pas*. Il s'avère que la mise en forme de cette hypothèse est en lien direct avec la formalisation exposée au §2.1.A et B ci-dessus.

2.1.D) Reprenons alors la description qu'offre $\zeta$ *à une échelle donnée*, description fournie par le choix d'une valeur de l'argument "$s$", de l'ensemble $\mathbb{N}$ puis en permettant dans un second temps que l'argument "$s$" devienne variable. L'énumération correspondant à la description disjonctive (ou encore additive), consiste à progresser le long de la structure ordonnée attachée au monoïde additif ; par ailleurs, en plaçant la problématique en un point représentatif d'un entier « *n* », le fait de disposer de la multitude de copies de $\mathbb{N}$ permet d'engendrer *de multiples représentations par factorisation* multiplicatives du successeur $n + 1$ en fonction du choix de l'échelle "$s$" qui conditionne la manière de représenter ce successeur sur la famille conjonctive dénombrable des axes étiquetés par les entiers premiers [RIP17]. Cette lecture de la construction de $\zeta$ se lit comme *un mécanisme récursif* soumis à des conditions rassemblées en une famille de taille inférieure à **c** (< **c**). Le schéma récursif en action s'apparente à la construction d'une fonction par prolongement ; plus généralement la technique mise en jeu relève de la technique de forcing créée par Paul Cohen [COP02].

2.1.E) la fonction $\zeta$ introduit naturellement *le concept d'ultrafiltre* [LET13] par le truchement de l'opérateur multiplicatif $\Pi$, lui-même équivalent au quantificateur $\forall$ d'un point de vue catégoriel.

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

2.1.F) En témoignant de la distributivité d'ordre infini (< **c**) permise dans le cadre de la théorie des algèbres de Boole, la fonction de $\zeta$ est constructible sans restriction. Parallèlement, la présence de $\zeta$ met en jeu implicitement le mécanisme récursif en présence de conditions de taille (< **c**) qui « force » à respecter la loi fondamentale de l'arithmétique consistant à décomposer tout entier en produit de nombres premiers ou ses regroupements ; de plus, l'ordre partiel multiplicatif de $\mathbb{N}$ respecte la condition d'anti-chaîne dénombrable (ccd). Autrement dit, la construction de $\zeta$ invite à considérer la situation où il s'agit de *bâtir de manière récursive un objet dans* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'induction opérant alors au travers d'un ultrafiltre en respectant des conditions spécifiques lorsque la taille excède le nombre d'étapes.

La lecture formelle de $\zeta$ conduit alors à interpréter la fonction comme opérateur logique interpolant les deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$, *ce qui peut encore se lire comme une grandeur intercalée entre le fini et l'infini*. Comme il a été vu ci avant tout entier est également représentable comme couple d'un ensemble fini et d'un ensemble infini $\langle I, A\rangle$, le second étant un représentant d'un intervalle, ou flèche, terminale. On peut ainsi voir la construction de $\zeta$ comme agrégation d'un collectif d'éléments de type $\langle I, A\rangle$ de taille inférieure à **c**. Il est possible sous certaines hypothèses, de rendre compte de cette construction comme processus récursif. L'axiome de Martin ressort alors naturellement de l'approche explicitée ci-dessus.

## 2.2. *La fonction $\zeta$ comme fonction ordinale*

2.2.A) Comme la fonction $\zeta$ est rattachée à la structure d'ordre et que nous avons dégagé le rôle de cette fonction comme interpolation de nature catégorique impliquant le foncteur diagonal et l'opérateur d'adjonction, il est pertinent d'appréhender cette fonction comme fonction ordinale. Nous avons également présenté dans le chapitre I de la présente analyse, la construction de l'objet catégorique $\mathbb{N}$ comme co-noyau, utilisant une flèche co-égalisant deux flèches élémentaires. Selon cette approche, l'existence de l'infinité dénombrable se confond, dans le cadre de la théorie des catégories, avec l'existence d'un co-noyau dans la catégorie des ensembles *Ens*.. *Néanmoins, cette construction de l'infini est insuffisante pour l'étudier et le caractériser sans « ingrédients » conceptuels supplémentaires*. A ce stade il est utile de rappeler deux résultats essentiels qui reposent sur *le recours à l'axiome du choix*. Rappelons que l'une des caractéristiques de $\mathbb{N}$ est de relever *d'un bon ordre*, c'est-à-dire tel *que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément* ; il est nécessaire de disposer d'une généralisation de cette propriété, à savoir :

*Axiome du choix* : soit $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles non vides, on peut alors définir une application $\varphi$ de $\mathcal{A}$ vers $\cup\{\mathrm{A} : \mathrm{A}\in\mathcal{A}\}$ telle que $\varphi(\mathrm{A})\in \mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{A}\in\mathcal{A}$ (cela signifie précisément qu'il s'agit de prélever simultanément un représentant $\varphi(\mathrm{A})$ de chaque ensemble). Grâce à cet axiome, on établit le théorème de Zermelo : Tout ensemble A peut être muni d'un bon ordre. Nous rapporterons brièvement une démonstration de ce qui précède après avoir abordé la notion de récursivité. Cette capacité d'énumération de tout ensemble, *y compris associé à un domaine connexe du plan complexe*, est l'une des clés de compréhension dans l'analyse de $\zeta$ .

Le théorème de récursivité est une deuxième conséquence de l'axiome du choix qui permet d'appréhender globalement $\zeta$. En effet, le passage à l'infini, qui est fréquemment présenté dans les travaux classiques de mathématiques comme une procédure banale, ne l'est en fait jamais ; ce passage doit toujours être contrôlé par une procédure parfaitement formalisée qui le justifie. Cette procédure repose systématiquement en dernière analyse sur l'axiome du choix. Ce fait est au demeurant bien connu et établi en logique, métamathématique ou en mathématiques appliquées lorsqu'il s'agit d'exécuter un algorithme à l'aide d'une machine. A cet égard observons qu'une suite générale convergente, n'existe pas concrètement ; il faut définir précisément un critère de convergence, de type Cauchy par exemple pour que la convergence ait un sens ; il est au demeurant très intéressant de relever qu'une telle exigence matérialise le fait qu'une limite de suite, par exemple de longueur infinie

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

dénombrable $f: \mathbb{N} \to X$, est toujours pondérée par une seconde fonction $g: \mathbb{N} \to X$ et que ce doublon est une manifestation de l'isomorphisme d'autosimilarité déjà mentionnée $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

*Théorème de récursivité* – soient Z un ensemble, $\alpha$ un nombre ordinal et $\mathcal{F}$ la famille de toutes les $\xi$-suites avec $\xi < \alpha$ à valeurs dans Z. Alors pour toute fonction $h: \mathcal{F} \to Z$ il existe *une unique fonction* $f: \alpha \to Z$ telle que $f(\xi)=h(f \restriction \xi)$ pour tout $\xi<\alpha$.

Le principe de la démonstration par l'absurde repose naturellement sur une induction transfinie permettant de considérer le plus petit ordinal $\alpha$ pour lequel l'énoncé est en défaut, ce dont témoigne une certaine fonction $h$, car pour tout $\xi \leq \zeta < \alpha$, il existe bien une fonction $f_\xi: \xi \to Z$ susceptible de vérifier $f_\xi(\gamma)=h(f \restriction \xi)$ pour tout $\gamma < \xi$. Partant, pour tout $\xi \leq \zeta < \alpha$ la fonction $f_\zeta | \xi$ vérifie cette même équation ; donc par unicité déjà acquise $f_\zeta | \xi = f_\xi$. Ainsi $f_\zeta(\gamma) = f_\xi(\gamma)$ pour tout $\gamma < \xi \leq \zeta < \alpha$. Il est ensuite facile, en considérant les deux cas de figure, $\alpha$ successeur ou $\alpha$ ordinal limite, de constater que l'on peut toujours prolonger la fonction précédente, *ce qui conduit à une contradiction*. *La fonction* $h$ *constitue précisément une fonction de choix* de type $\mathcal{P}(Z) \to Z$ qui est parfois appelée un *oracle*. Une telle fonction permet ainsi de construire *un bon ordre sur tout ensemble*. En effet, supposons que nous disposions d'une fonction de choix $h$ sur $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Considérons un élément quelconque $p \notin X$, cela peut être $p = X$ car $\in$ est bien ordonné dans ZFC ; on définit $F: \mathcal{P}(X \cup \{p\}) \to X \cup \{p\}$ par :

$$F(Z) = \begin{cases} C(Z) pour\ Z \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \\ \qquad p\ sinon \end{cases}$$

Soit $\mathcal{G}$ la famille des ordinaux $\xi$ tels qu'il existe une $\xi$-suite dans $X$ biunivoque. Si maintenant il existe un nombre ordinal $\alpha$ qui n'appartient pas à $\mathcal{G}$, notamment $\alpha = (\cup \mathcal{G}) + 1$. On peut définir $f: \alpha \to X \cup \{p\}$ vérifiant $f(\xi)=F(X) \setminus \{f(\zeta) : \zeta<\xi\}$ pout tout $\xi<\alpha$. Nécessairement $f(\alpha) \not\subset X$ puisque par hypothèse il n'existe pas de $\alpha$-suite biunivoque dans X. Ainsi s = $\{\beta \leq \alpha : f(\beta)=p\}$ est non vide. On prend $\beta$=min s. Alors $f|\beta$ est biunivoque, et *cela établit un bon ordre sur* $X$ de type $\beta$ en posant $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$.

Nous allons montrer dans la suite que la fonction $\zeta$ peut être identifiée comme une telle fonction de choix, autrement dit à *un oracle*, pour $X = \mathbb{N}$ en fournissant des suites de longueur $\boldsymbol{c}$. *Par le truchement de cette fonction nous obtenons un modèle du continu selon un procédé qui relève fondamentalement de la technique du forcing à la Cohen.*

2.2.B) Nous rappelons à présent quelques faits de base qui concernent les ordinaux et les cardinaux. Il est utile de commencer par un une vision synthétique du distinguo entre Ordinal et Cardinal

Soit $S$ un ensemble ; $S$ est dénombrable s'il existe une injection de $S$ vers $\mathbb{N}$, sinon $S$ est non dénombrable. Cet ensemble $S$ *est transitif si tout élément de* $S$ *est un sous-ensemble de* $S$. L'ensemble $S$ est un ordinal s'il est transitif et *si* $(S, \in)$ *est totalement ordonné* en appréhendant l'appartenance « $\in$ » comme un ordre partiel strict. Soient $\alpha$ et $\beta$ des ordinaux, $\alpha < \beta$ dans la classe $Ord$ des ordinaux. Si $\alpha \in \beta$, de sorte que $(Ord, \leq)$ *définit une classe bien ordonnée* alors tout ensemble bien ordonné de la classe est isomorphe en ordre à un unique ordinal. Pour $S$ un ensemble d'ordinaux, $\cup\{\alpha : \alpha \in S\}$ est l'ordinal qui est la borne supérieure de $S$ dans $Ord$. Pour un ordinal quelconque $\alpha$, l'ensemble $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal appelé le successeur de $\alpha$, noté $\alpha + 1$. *Un ordinal non nul qui n'est pas un successeur est appelé un ordinal limite*. L'élément minimal dans $Ord$ est $\emptyset$ identifié au nombre 0, les ordinaux finis sont identifiés aux éléments de $\mathbb{N}$. *C'est ainsi que l'ensemble ordonné* $(\mathbb{N}, \leq)$ *est isomorphe au premier ordinal infini* $\omega=\omega_0$ *; le premier ordinal non dénombrable sera noté* $\omega_1$.

Par eux ensembles $S$ et $T$ sont *équipotents* s'il existe une bijection de $S$ vers $T$. Un ordinal $\alpha$ est aussi un cardinal si pour tout ordinal $\beta$ vérifiant $\beta < \alpha$, *$\alpha$ et $\beta$ ne sont pas équipotents*. Pour tout ensemble $S$ il existe *un ordinal minimal* qui, équipotent avec $S$, est appelé le cardinal de $S$. Il est noté $|S|$. Ainsi les *ordinaux* $\omega_0$ et $\omega_1$ sont des *cardinaux* notés respectivement $\aleph_0$ et $\aleph_1$. Le plus petit cardinal strictement plus grand qu'un cardinal $\kappa$ est appelé le cardinal successeur noté $\kappa^+$. Pour un cardinal $\kappa$, on définit $2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$. En particulier, la droite réelle $\mathbb{R}$ a pour cardinal $2^{\aleph_0}$, également noté c.

Nous pouvons donc résumer la notion d'ordinal de la manière suivante. Un ordinal est l'ensemble de ses prédécesseurs ; les cardinaux sont des ordinaux initiaux. Tout ordinal $\alpha$ s'écrit de manière unique comme une somme $\lambda(\alpha) + n(\alpha)$ avec $\lambda(\alpha)$ ordinal limite et $n(\alpha)$ un nombre naturel.

Il est possible de construire une arithmétique des nombres ordinaux.

La somme $\alpha+\beta$ est le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné $(\{0\} \text{ x } \alpha) \cup (\{1\} \text{ x } \beta)$ qui est ordonné par : $< i,\xi > \leq < j,\zeta > \Leftrightarrow i<j \vee ( i = j \;\&\; \xi \leq \zeta )$ Procédure qui consiste à parcourir $\beta$ après avoir parcouru tout $\alpha$.

*Le produit* $\alpha\ \beta$ est le type d'ordre de l'ensemble $\alpha$ x $\beta$ ordonné de manière lexicographique. Il convient de noter que *cette arithmétique généralisée n'est plus commutative ni additivement, ni multiplicativement*. A titre d'illustration 1+ω=ω, donc $1+\omega \neq \omega+1$ $2\omega = \omega$, $\omega^2 = \omega+\omega$ et $\omega \neq \omega+\omega$.

2.2.C) A ce stade, il est important d'introduire un concept important qui a été identifié par Felix Hausdorff. Il interviendra ultérieurement pour *comprendre comment la fonction ζ agit sur les ordinaux*, essentiellement ceux qui sont limites. Il s'agit du *concept de cofinalité*. Ce concept peut aussi être appréhendé de manière catégorique en tant qu'adjonction comme l'ingénieur John Wilder Tukey l'a repéré dans son étude canonique sur les *uniformités topologiques* [TUJ40] au même moment où André. Weil abordait cette même notion au travers de *la notion d'entourage*, comme variante affinée de la notion de voisinage topologique (il est remarquable que dans cette théorie tout entourage V admet un entourage $W$ tel que $W^2 \subset V$ où $W^2=\{ (x,y) : \exists z,(x,z) \in W \text{ et } (z,y) \in W \}$ expression qui constitue précisément une réminiscence de la relation d'autosimilarité arithmétique $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. *L'opérateur de cofinalité se substitue à l'opération d'adjonction* qui apparaît dans l'interprétation catégorique de la fonction ζ *alors que le foncteur diagonal est remplacé par le passage par des ordinaux limites*. A ce stade il est particulièrement important de bien saisir le rôle jouer par la cofinalité ; nous passons donc en revue les propriétés les plus notables.

Soit $(S, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, un sous-ensemble $T$ de $S$ est :

- Un *intervalle* si pour tous $t_1,t_2 \in T$ et tout $s \in S$ vérifiant $t_1 \leq s \leq t_2$, il s'en suit que $s \in T$. Cet intervalle est *dense* en ordre dans S si pour tous $s_1,s_2 \in T$ avec $s_1<s_2$ il existe $t \in T$ vérifiant $s_1 \leq t \leq s_2$.
- Il est *cofinal* dans $S$ si pour tout $s \in S$ il existe $t \in T$ vérifiant $s \leq t$.
- Il est *coinitial* dans S si pour tout $s \in S$ il existe $t \in T$ vérifiant $t \leq s$.

Dans le cas particulier $S = \mathbb{R}$, on dispose de $\mathbb{Q}$ comme sous-ensemble dense en ordre, alors que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble cofinal de $\mathbb{R}$.

La topologie d'ordre sur $S$ est celle définie en prenant comme sous-base la collection des intervalles de la forme $]-\infty, s[ = \{t \in S : t < s\}$ et $]s, \infty[ = \{t \in S : t > s\}$. Par exemple la topologie standard de $\mathbb{R}$ s'identifie à la topologie d'ordre attachée à son ordre naturel. Un ordinal $\alpha$ est identifié à l'intervalle

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

$[0,\alpha[$ dans $Ord$, qui est un espace localement compact pour sa topologie d'ordre. *Observons qu'il est compact si et seulement si* $\alpha$ *n'est pas un ordinal limite*[10].

Soit $(S,\leq)$ un ensemble totalement ordonné, *le poids de S est le cardinal minimal d'un sous-ensemble dense* dans $S$, il est noté $w(S)$. Si $w(S)=\kappa$, on a nécessairement $|S|\leq 2^{\kappa}$. Si $T$ est un sous-ensemble dense dans $S$, on définit alors l'injection : $S\to\mathcal{P}(T): s\mapsto\{t\in T: t<s\}$. Par exemple $w(\mathbb{R})=\aleph_0$ alors que $|\mathbb{R}|=\mathbf{c}$. Le cardinal et le poids tel que défini ci-dessus sont des invariants pour des ensembles totalement ordonnés.

Pour un ordinal $\sigma$, une suite $s=(s_\tau:\tau<\sigma)$ dans un ensemble $S$ est une application de $\sigma$ vers $S$ dont la longueur est par définition $\sigma$, notée $l(s)=\sigma$. L'ensemble $S$ est *bien ordonné* si et seulement si pour toute suite décroissante de longueur $\omega$, *un ensemble infini totalement ordonné* quelconque admet soit une suite strictement croissante, soit une suite strictement décroissante de longueur $\omega$.

La *cofinalité* d'un ensemble totalement ordonné est le *cardinal minimal* $\kappa$ tel qu'il existe une *suite strictement croissante* de longueur $\kappa$ dont l'image est cofinale dans $S$ ; cela est noté $cof S=\kappa$. Par exemple $cof(\mathbb{R})=\aleph_0$. De manière duale on définit la *coinitialité* en considérant des *suites strictement décroissantes* et des images coinitiales.

*Il est possible de faire le lien entre cofinalité mathématique et granularité physique: ainsi pour tout ordinal* $\alpha$, $cof(\alpha+1)=1$ ; *en effet, l'application* $f: 1\to\alpha$ *avec* $f(0)=\alpha$ *est cofinale dans* $1+\alpha$. *De même, si* $cof(\alpha)=1$ *alors* $\alpha$ *possède un plus grand élément. En résumé,* $cof(\alpha)=1$ *si et seulement si* $cof(\alpha)<\omega$ *donc si et seulement si* $\alpha$ *est un ordinal successeur. Par conséquent la notion de cofinalité prend tout son sens avec les ordinaux limites. La notion de cofinalité traduit la notion intuitive de granularité des objets considérés. Les ordinaux limites marquent en pratique un changement de granularité ;* $cof(\alpha)$ *constitue intuitivement l'échelle, ou ordre linéaire, à la granularité la plus grossière adaptée pour parcourir l'ensemble ordonné qu'est l'ordinal* $\alpha$. *Autrement dit la cofinalité fournit une échelle adaptée à une structure ordinale donnée.*

*Pour tout ordinal* $\alpha$ *il existe une application cofinale strictement croissante* $f: cof(\alpha)\to\alpha$

*Preuve :* Le cas d'un ordinal successeur a déjà été examiné ci-dessus avec $f: 1\to a$ et $f(0)=a$ , qui satisfait à l'exigence. Pour un ordinal limite a, partant d'une application cofinale $g: cof(a)\to a$, on la corrige de la manière inductive par $f(\eta)=\max\{g(\eta),\cup_{\xi<\eta}(f(\xi)+1)\}$. D'où $f(\xi)<f(\xi+1)\leq f(\eta)$ pour tout $\xi<\eta<cof(\alpha)$, partant $f$ est strictement croissante. On a $f(\eta)\in\alpha$, en particulier $f(\eta)$ ne peut pas être égal à $\alpha$ puisque dans ce cas la restriction de $f$ à $\eta$ serait cofinale dans $\alpha$ en contradiction avec le caractère minimal de $cof(\alpha)$. Pour tout $\xi\in\alpha$, il existe $\eta<cof(\alpha)$ vérifiant $\xi<g(\eta)<f(\eta)$ avec $f$ strictement croissante □

*La fonction de cofinalité est idempotente*, ce qui est naturel s'agissant d'une adjonction déguisée. Ainsi $cof(cof(\alpha))=cof(\alpha)$ *pour tout ordinal* $\alpha$.

*Preuve* : d'après le résultat précédent nous pouvons considérer des applications strictement croissantes $f: cof(cof\alpha))\to cof(\alpha)$ et $g: cof(\alpha)\to\alpha$. La composition : $g\circ f: cof(cof\alpha))\to\alpha$ est également cofinale car pour $\xi<\alpha$ quelconque il existe $\eta\in cof(\alpha)$ tel que $\xi\leq g(\eta)$, de même $\eta\leq f(\zeta)$ pour un $\zeta\in cof(cof\alpha))$. Par conséquent : $\xi\leq g(\eta)\leq g(f(\zeta))=g\circ f(\zeta)$. Comme $cof(\alpha)$ est par définition minimale, il vient $cof(cof\alpha))\geq cof(\alpha)$ et l'inégalité opposée est acquise puisque on a toujours $cof(\alpha)\leq\alpha$ pour tout $\alpha$. □

[10] Commentaire de l'éditeur : On voit là apparaitre toute la subtilité induite par le traitement de l'ouverture à l'infini, ouverture qui n'est pas sans conséquence physique majeure.

Un opérateur idempotent peut également être vu comme un *opérateur de clôture topologique*. De même qu'un ordinal est dit régulier s'il est limite et si $cof(\alpha) = \alpha$ les opérateurs idempotents appellent naturellement *l'examen de leurs points fixes* qui tiennent systématiquement une place déterminante dans leurs propriétés. *Or un nombre ordinal régulier est un nombre cardinal.*

Preuve : posons $\beta = |cof(\alpha)|$, il existe une bijection $f: \beta \to cof(\alpha)$ ; par ailleurs il existe une application cofinale $g: cof(\alpha) \to \alpha$. Alors $g \circ f : \beta \to \alpha$ est cofinale dans $\alpha$ puisque $g \circ f\ (\beta) = g(cof(\alpha))$. Par minimalité de cf($\alpha$), $\alpha = cof(\alpha) \leq \beta = |cf(\alpha)| = |\alpha|$, donc $\alpha = |\alpha|$ et $\alpha$ est un nombre cardinal. □

Or les cardinaux réguliers jouissent de propriétés particulières parmi lesquelles :

*Si $\lambda$ est un cardinal régulier $A \subset \lambda$ et $|A| < \lambda$, alors il existe $\alpha < \lambda$ tel que $A \subset \alpha$*

Preuve : en considérant le type d'ordre de $A$ $\beta = to(A)$, c'est-à-dire une manière d'en énumérer les éléments, avec $f: \beta \to A \subset \lambda$ isomorphisme d'ordre. Nous avons $|\beta| = |A| < \lambda = cof(\lambda)$ ; donc $\beta < cof(\lambda)$. Il s'en suit que $A = f(\beta)$ n'est pas non borné dans $\lambda$ ; ce qui signifie qu'il existe un $\alpha < \lambda$ tel que $\xi < \alpha$ pour tout $\xi \in A$. Donc $A \subset \alpha$.□

*Si $\alpha < \omega_1$ (avec $\omega_1$ le premier ordinal non dénombrable) est un ordinal limite, alors cof($\alpha$)= $\omega_0$. Par ailleurs pour tout cardinal infini $\kappa$, cof($\kappa$) > $\kappa$*

*Preuve*: soit $f: cof(\kappa) \to \kappa$ une application cofinale, et soit une application $F: \kappa \to \kappa^{cf(\kappa)}$ , il faut vérifier qu'elle n'est jamais surjective. Pour $\alpha < \mathrm{cof}(\kappa)$, $F(\xi)(\alpha)$ est défini et $|\{F(\xi)(\alpha): \xi < f(\alpha)\}| \leq |f(\alpha)| < \kappa$. Ce fait permet de définir h : $cof(\kappa) \to \kappa$ au moyen de la relation : $h(\alpha) = \min\ (\kappa \setminus \{F(\xi)(\alpha): \xi < f(\alpha)\})$. Pour $\xi < \kappa$ il existe $\alpha < cof(\kappa)$ tel que $\xi < f(\alpha)$, donc tel que $h(\alpha) \neq F(\xi)(\alpha)$. Il en résulte que $h \neq F(\xi)$ pour tout $\xi < \kappa$ ; ce qui implique que $h \notin F(\kappa)$. Il en résulte le corollaire important suivant : *cof ( **c** ) > w* . Supposons que $cof(\mathfrak{c}) = \omega$. Il s'en suivrait que $\mathfrak{c}^{\mathrm{cof}(\mathfrak{c})} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega \times \omega} = 2^{\omega} = \mathfrak{c}$. Ce qui est en contradiction avec le résultat précédent. □

La conjugaison de ces derniers résultats met en évidence l'effet de barrière engendré par le passage au continu **c** ; par ailleurs *pour les ordinaux limites strictement inférieurs à $\omega_1$, la cofinalité est limitée à l'infini dénombrable*, tout l'enjeu est donc de comprendre ce qui se passe dans l'intervalle compris entre $\omega_1$ et **c**. Ce point est capital non seulement dans l'approche formelle qui va suivre mais aussi dans les conséquences physiques qui seront vues dans le paragraphe 3 de la présente étude.

2.2.D) Il est alors utile de regrouper des faits importants caractérisant la topologie des ordinaux.

Notons W l'espace des ordinaux dénombrables. D'une manière générale, l'ensemble des ordinaux inférieurs à un ordinal donné $\alpha$ est noté W($\alpha$) : W($\alpha$) = $\{\sigma: \sigma < \alpha\}$. il s'agit évidemment d'un ensemble bien ordonné, muni de la topologie des intervalles. 0 est un point isolé et pour tout point $\tau > 0$, l'ensemble des intervalles ouverts-fermés $[\sigma + 1, \tau] = \{x: \sigma < x < \tau + 1\}$ où $\sigma < \tau$ constitue un système de voisinages de base. Un point de W($\alpha$) est un point isolé si et seulement s'il n'est pas un ordinal limite, c'est-à-dire vaut 0 ou admet un prédécesseur immédiat. *L'espace W($\omega$) des ordinaux finis est homéomorphe à* $\mathbb{N}$. Pour $\sigma < \alpha$, W($\sigma$) est un sous-espace de W($\alpha$).

Tout ensemble non vide d'ordinaux, étant bien ordonné, admet un plus petit élément ; par ailleurs, tout ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure. Si A $\subset$ W($\alpha$), sup A $\in$ W($\alpha$) si et seulement si A est borné dans W($\alpha$), donc s'il existe $\sigma < \alpha$ tel que x $\leq \sigma$ pour tous x $\in$ A. A est cofinal dans W($\alpha$) si pour tout $\sigma < \alpha$ il existe x $\in$ A tel que x $\geq \sigma$. Par conséquent, si W($\alpha$) possède un plus grand élément, tout sous-ensemble contenant cet élément est borné et cofinal ; si $\alpha$ est un ordinal limite, *un sous-ensemble est cofinal si et seulement s'il est non borné.*

*En outre pour tout ordinal $\alpha$, W($\alpha$) est un espace normal*

*Preuve* : l'espace est clairement de Hausdorff [11] ; soient H et K deux fermés disjoints, pour $\tau \in$ H, notons $U_\tau$ un intervalle ouvert de la forme $[\sigma, \tau]$ ne rencontrant pas K et de même notons $V_\tau$ pour $\tau \in$ K. alors $\bigcup_{\tau \in \mathrm{H}} U_\tau$ et $\bigcup_{\tau \in \mathrm{K}} V_\tau$ sont des ouverts disjoints contenant respectivement H et K. □

*W($\alpha$) est compact si et seulement si $\alpha$ n'est pas un ordinal limite*

*Preuve* : toute extrémité $\mathrm{W}(\alpha) - \mathrm{W}(\sigma) = \{x \in \mathrm{W}(\alpha) : \mathrm{x} \geq \sigma\}$ avec $\sigma < \alpha$ est un fermé, et cette famille d'ensembles vérifié la propriété d'intersection finie. Si $\alpha$ est limite, l'intersection de cette famille est vide, par suite W($\alpha$) n'est pas compact. Réciproquement, W(0) est vide, donc compact par convention. Considérons un ordinal non limite, $\alpha' = \alpha + 1$, et supposons par induction que W($\tau$) est compact pour tout ordinal non limite $\tau < \alpha + 1$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de W($\alpha + 1$) par des ouverts de base ; il existe $\sigma < \alpha$ tel que $[\sigma + 1, \alpha] \in \mathcal{U}$. Par hypothèse inductive W($\sigma + 1$) est recouvert par une sous-collection finie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$, par suite $\mathcal{F} \cup \{[\sigma + 1, \alpha]\}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$ pour W($\alpha + 1$). Ce raisonnement montre que W($\alpha$) est toujours localement compact ; de plus, si W($\alpha$) n'est pas compact, W($\alpha + 1$) en est un compactifié à un point. □

Intéressons-nous plus particulièrement à l'espace des ordinaux dénombrables.

Notons **W**=W($\omega_1$) et **W***=W($\omega_1$+1)**.** Compte tenu de ce qui précède, **W*** est compact tandis que **W** ne l'est pas. **W*** est le compactifié à un point de **W**. Puisque $\omega_1$ est le plus petit ordinal indénombrable, tout ensemble indénombrable de **W** est cofinal. En revanche :

*Aucun ensemble dénombrable de W n'est cofinal.*

*Preuve* : soit S cofinal, il vient **W** $= \bigcup_{\sigma \in S} \mathrm{W}(\sigma)$ et par conséquent $\aleph_1 \leq \sum_{\sigma \in S} |\sigma| \leq |S| \cdot \aleph_0$, ce qui implique que $|S| = \aleph_1$. Il s'en suit que tout sous-ensemble dénombrable A de **W** est contenu dans un sous-espace compact. Si $\alpha =$ sup A, on a $\alpha \in$ **W** et A $\subset$ W($\alpha + 1$). Il s'en suit que tout fermé dénombrable de **W** est compact. Ainsi, tout ensemble infini dénombrable admet un point limite, cela signifie que **W** est dénombrablement compact. □

*De deux ensembles fermés disjoints dans W, l'un des deux est borné donc dénombrable et compact.*

*Preuve* : si H et K sont des ensembles fermés et cofinaux ; on peut identifier une suite croissante $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\alpha_n \in$ H pour n impair, $\alpha_n \in$ K pour n pair. On a $sup_n \alpha_n \in H \cap K$ ; ce qui est impossible par l'hypothèse de disjonction □

T*oute fonction f* $\in$*C(W) est constante sur une extrémité W-W($\alpha$)*

*Preuve* : toute extrémité est homéomorphe à **W**, donc dénombrablement compacte, son image par une fonction continue à valeurs réelles est un ensemble dénombrablement compact de $\mathbb{R}$, donc un compact. Il en résulte que l'intersection emboîtée $\bigcap_{\sigma \in \mathrm{W}} f(\boldsymbol{W} - \mathrm{W}(\sigma))$ est non vide. Prenons un élément r dans cette intersection, l'ensemble fermé $f^{-1}(r)$ est cofinal dans W ; le fermé $\left\{x \in W : |f(x) - r| \geq \frac{1}{n}\right\}$ est disjoint de $f^{-1}(r)$, et par le résultat précédent *il admet une borne supérieure* $\alpha_n \in$ W. *pour tout ordinal dénombrable* $\alpha > sup_n \alpha_n$ on a $f(\boldsymbol{W} - \mathrm{W}(\alpha) = \{r\}$ □

Ce fait important induit une conséquence tout aussi importante, à savoir que *toute fonction f* $\in$ *C(**W**) se prolonge en une fonction* $f^\beta \in$ *C(**W***) en définissant* $f^\beta(\omega_1)$ *comme la valeur terminale constante de*

[11] En mathématiques, un espace séparé, dit aussi espace de Hausdorff, est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints. Cette condition est aussi appelée axiome T2 au sein des axiomes de séparation. A propos des espaces normaux on examinera dans les références les différentes notions qui rendent extrêmement subtils les questions de dimensions en topologie.

*f. Comme l'on sait à partir de la théorie de Cech-Stone un tel prolongement est unique*. Dans la direction opposée, pour g $\in$ C(**W***), sa restriction à **W** appartient à C(**W**) ; *il en résulte que C(**W**) et C(**W***) sont isomorphes, alors même que **W** et **W*** sont des espaces topologiquement différents*[12].

2.2.E) Nous abordons maintenant l'étape principale de notre approche qui explique la nature ordinale de la fonction $\zeta$ en adossement au lemme de Fodor [FOG56], encore appelé le lemme du pressoir. Il s'agit est de la mise en forme ultime d'un phénomène mise à jour d'abord par Alexandroff et Urysohn dans un mémoire de topologie paru en 1929, remarquant que *toute fonction surjective $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ est nécessairement constante sur un sous-ensemble indénombrable*. Il est préalablement utile de rappeler le contenu formel de la notion de filtre.

Pour un ensemble A, un *filtre sur A* est un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$, soit donc une collection de sous-ensembles de A, tel que :

(a) $A \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \notin \mathcal{F}$
(b) $\forall$ X, Y $\in \mathcal{F}$, X$\cap$Y $\in \mathcal{F}$
(c) $\forall$ X $\in \mathcal{F}$, $\forall$ Y $\subset$ A, (X $\subset$ Y $\Rightarrow$ Y $\in \mathcal{F}$)

*De manière duale*, un idéal sur A est un sous-ensemble $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(A)$ tel que :

(a) $\emptyset \in \mathcal{I}$ et $A \notin \mathcal{I}$
(b) $\forall$ X, Y $\in \mathcal{I}$, X$\cup$Y $\in \mathcal{I}$
(c) $\forall$ X $\in \mathcal{I}$, $\forall$ Y $\subset$ A, (X $\supset$ Y $\Rightarrow$ Y $\in \mathcal{I}$)

Si $\mathcal{I}$ est un idéal sur A, alors $\mathcal{I}^*$ est son filtre dual défini par $\{X \subset A: A \setminus X \in \mathcal{I}\}$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur A, alors $\mathcal{F}^*$ est son idéal dual défini par $\{X \subset A: A \setminus X \in \mathcal{F}\}$. Pour tout A infini, $\{X \subset A: |X| < \omega\}$ est un idéal sur A. *La notion de filtre rend compte intuitivement de la notion de propriété vraie presque partout*.

Commentaire : Ce fait est rattaché à l'exemple canonique suivant. Soit A = $[0,1] \subset \mathbb{R}$ et $\mu$ la mesure de Lebesgue ; alors $\mathcal{F} = \{X \subset [0,1]: \mu(X) = 1\}$ est un filtre, l'idéal associé étant $\mathcal{F}^* = \{X \subset [0,1]: \mu(X) = 0\}$. Si $\kappa$ est un cardinal infini, considérons $\mathcal{I} = \{X \subset \kappa: |X| < \kappa\}$, on définit un ensemble presque disjoint comme un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset (\mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathcal{I})$ tel que X$\cap$Y $\in \mathcal{I}$ quand X et Y sont des membres distincts de $\mathcal{A}$. Par définition, un idéal est fermé pour les unions finies ; mais de nombreux exemples importants sont fermés pour des unions beaucoup plus vastes.

Un idéal $\mathcal{I}$ est dit $\kappa$-complet si et seulement si $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{I}$, $|\mathcal{A}| < \kappa \Rightarrow \cup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$. De même, un filtre est $\kappa$-complet si et seulement si $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, $|\mathcal{A}| < \kappa \Rightarrow \cap \mathcal{A} \in \mathcal{F}$. Evidemment, un idéal est $\kappa$-complet si et seulement si son filtre dual est $\kappa$-complet. Tout idéal et tout filtre sont $\omega$-complets. Si $\mathcal{I}$ est un idéal sur A et si $\{a\} \in \mathcal{I}$ pour tout a $\in$ A, alors $\mathcal{I}$ n'est pas $|A|^+$-complet puisque A = $\cup\{\{a\}: a \in A\} \notin \mathcal{I}$. En revanche, il peut se faire qu'un idéal $\mathcal{I}$ soit $|A|$-complet ; ainsi $\{X \subset \kappa: |X| < \kappa\}$ est $\kappa$-complet si et seulement si $\kappa$ est régulier.

Soit $X$ un ensemble d'ordinaux, $\alpha > 0$ un ordinal limite, $\alpha$ est un point limite de $X$ si $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$. Pour $\kappa$ un cardinal indénombrable régulier, *un ensemble $C \subset \kappa$ est un sous-ensemble clos (fermé) et non borné - également dénommé <u>club</u> – s'il contient tous ses points limites inférieurs à $\kappa$*. Enfin un ensemble $S \subset \kappa$ est dit *<u>stationnaire</u>* si $S \cap C \neq \emptyset$ pour tout club $C$ de $\kappa$. Autrement dit, un ensemble non

[12] Note de l'éditeur : Au plan physique cette observation a une conséquence importante car c'est précisément la fonction zêta de Riemann qui va assurer le rôle de pont entre des structures différentes. Différents modèles pourront être couplés universellement.

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

borné $C \subset \kappa$ est fermé (ou clos) si et seulement si pour toute suite $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\xi < \cdots$ $(\xi < \gamma)$ d'éléments de $C$ de longueur $\gamma < \kappa$ on a $lim_{\xi \to \gamma} \alpha_\xi \in C$. Si C et D sont des clubs, alors C ∩ D est un club

*Preuve*: clairement $C \cap D$ est fermé. Considérons $\alpha < \kappa$ ; puisque $C$ est non borné, il existe $\alpha_1 > \alpha$ avec $\alpha_1 \in C$. De même, il existe $\alpha_2 > \alpha_1$ avec $\alpha_2 \in D$ ; par suite on obtient une suite croissante $\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ où $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}, \ldots \in C$ et $\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots \in D$ et par conséquent $\beta$ la limite de cette suite qui vérifie à la fois $\beta \in C$ et $\beta \in D$ □

Ainsi, la collection des sous-ensembles club de $\kappa$ satisfait la propriété de l'intersection finie, et engendre donc un filtre appelé le filtre club sur $\kappa$. L'ensemble des ordinaux limites $\alpha < \kappa$ est clairement non borné et fermé. De même, si $A$ est un sous-ensemble non borné de $\kappa$, l'ensemble de ses points limites $\alpha < \kappa$ forme un club. Une fonction $f : \kappa \to \kappa$ est normale si elle est croissante et continue, ce qui signifie que $lim_{\xi \to \alpha} f(\xi) = f(\alpha)$. L'image d'une fonction normale est un club. Réciproquement, si $C$ est un club, il existe une unique fonction normale. <u>Elle consiste simplement à énumérer cet ensemble</u>.

*L'intersection de moins de $\kappa$ clubs de $\kappa$ est un club*

*Preuve* : soit une suite $\langle C_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ de clubs ; le résultat précédent permet de conclure pour des ordinaux successeurs $\gamma$. Dans le cas où $\gamma$ est un ordinal limite, si le résultat annoncé est acquis de manière inductive pour tous $\alpha < \gamma$ on peut remplacer $C_\alpha$ par $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$de telle sorte que l'on ait une suite décroissante de même intersection. Par suite, on part d'une suite décroissante : $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_\alpha \supset \cdots$ de clubs avec $C = \bigcap_{\alpha < \gamma} C_\alpha$. $C$ est borné ; il est ensuite aisé de bâtir une $\gamma$-suite : $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\xi < \cdots$ $(\xi < \gamma)$ telle que $\beta_0 \in C_0$ avec $\beta_0 > \alpha$. Supposons que par induction l'on ait obtenu $\beta_\xi \in C_\xi$ avec $\beta_\xi > sup\{\beta_\nu : \nu < \xi\}$. Comme $\kappa$ est un cardinal régulier, la suite précédente existe avec une limite $\beta < \gamma$. Cette limite est limite d'une suite $\langle \beta_\xi : \eta \leq \xi < \gamma \rangle$ dans $C_\eta$ si bien que $\beta \in C_\eta$ ; par conséquent $\beta \in C$. Ainsi $C$ est un club □

Si $\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ est une suite de sous-ensembles de $\kappa$. *L'intersection diagonale de* $X_\alpha$ est alors définie comme : $\Delta_{\alpha<\gamma} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \cap_{\alpha<\gamma} X_\alpha\} = \{\xi \in X_\alpha : \xi > \alpha\} = \cap_\alpha (X_\alpha \cup \{\xi : \xi \leq \alpha\})$

*L'intersection diagonale d'une $\kappa$-suite de clubs est un club*

*Preuve* : dans une suite de clubs $\langle C_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$, en remplaçant chaque $C_\alpha$ par $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$, l'intersection diagonale est identique, si bien que l'on peut supposer disposer d'une suite décroissante $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_\alpha \supset \cdots$ où $\alpha < \kappa$. En posant $C = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, on considère $\alpha$ un point limite de $C$. Pour $\xi < \alpha$, si $X = \{\nu \in C : \xi < \nu < \alpha\}$, $\nu \in X$ est tel que $\nu \in C_\xi$, d'où $X \subset C_\xi$, par suite $\alpha = supX \in C_\xi$ et ainsi $\alpha \in C$ ; cela entraîne que $C$ est fermé. Montrer le caractère non borné de $C$, conduit à construire une suite $\langle \beta_n : n < \omega \rangle$ en partant de $\beta_0 \in C_0$ avec $\beta_0 > \alpha$, puis $\beta_{n+1} > \beta_n$ avec $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$. Considérons la limite $\beta$, pour $\xi < \beta$, il existe $n$ tel que $\xi < \beta_n$ et chaque $\beta_k$ où $k > n$ est situé dans $C_{\beta_n}$si bien que $\beta \in C_{\beta_n}$. Par conséquent, $\beta \in C_\xi$ pour tout $\xi < \beta$, et ainsi $\beta \in C$, c'est-à-dire que $C$ est non borné □

Il en résulte le corollaire suivant : *Le filtre des clubs sur $\kappa$ est fermé pour les intersections diagonales*. Comme cela est usuel, il est alors pertinent d'associer la notion duale, à savoir celle d'idéal des ensembles non stationnaires $I_{NS}$ qui est ainsi $\kappa$-complet et stable par unions diagonales, définies par l'identité : $\Sigma_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \cup_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$. Une fonction ordinale $f$ sur un ensemble $S$ est dite régressive si $f(\alpha) < \alpha$ pour tout $\alpha \in S$, $\alpha > 0$.

*<u>Théorème de Fodor</u> : si f est une fonction régressive sur $S \subset \kappa$, il existe alors un ensemble stationnaire $T \subset S$ et un $\gamma < \kappa$ tels que $f(\alpha)=\gamma$ pour tout $\alpha \in T$*

*Preuve* : supposons que pour tout $\gamma < \kappa$, $\{\alpha \in S: f(\alpha) = \gamma\}$ soit non stationnaire. On choisit un club $C_\gamma$ dans lequel $f(\alpha) \neq \gamma$ pour tout $\alpha \in S \cap C_\gamma$. Soit $C = \Delta_{\gamma<\kappa} C_\gamma$, alors $S \cap C$ est stationnaire ; de plus, nous avons $f(\alpha) \neq \gamma$ pour tout $\gamma < \alpha$, c'est-à-dire que $f(\alpha) \geq \alpha$, ce qui contredit l'hypothèse de départ □

Soit f une fonction de $\omega_1$ dans ℝ ; pour tout r ∈ ℝ et h > 0, ou bien $f^{-1}(r+h, \infty)$ ou bien $f^{-1}(-\infty, r-h)$ est dénombrable (*)

*Preuve* : dans le cas contraire, on peut choisir par induction des $\alpha_n$ vérifiant :

i) $\alpha_{n+1} > \alpha_n$
ii) Si n pair, $\alpha_n \in f^{-1}(r+h, \infty)$
iii) Si n impair, $\alpha_n \in f^{-1}(-\infty, r-h)$

En posant $\alpha = sup_{n\in\omega}\alpha_n$ ; en particulier $\alpha = sup_{n\in\omega, n\ pair}\alpha_n$ et ainsi f($\alpha$) $\geq r+h$, de même $\alpha = sup_{n\in\omega, n\ impair}\alpha_n$ et ainsi f($\alpha$) $\leq r-h$. Il en résulte une contradiction □

Dans le cas h $= \frac{1}{n}$ avec n parcourant ω on obtient : pour tout r ∈ ℝ , soit $f^{-1}(r, \infty)$ soit $f^{-1}(-\infty, r)$ est dénombrable ; soit les représentations schématiques 1 et 2 suivantes :

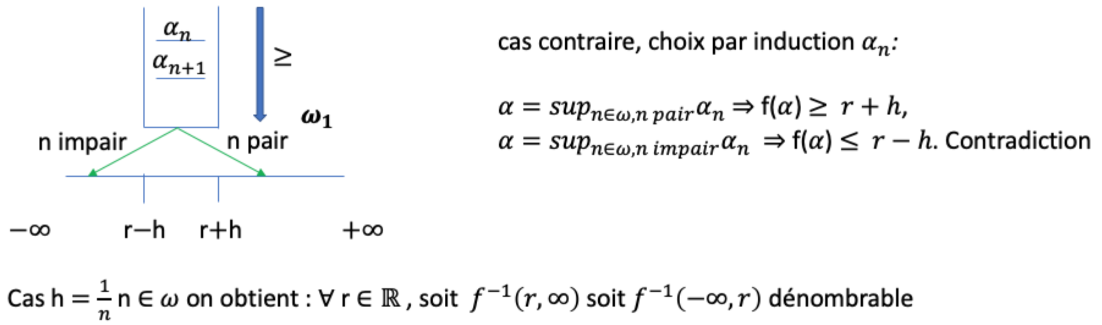



**Schéma 1.** *A propos d'une question de dénombrabilité*

Soit q ∈ ℚ, choisissons $\alpha_q$ de telle sorte que soit $f^{-1}(q, \infty)$ soit $f^{-1}(-\infty, q)$ est borné par $\alpha_q$.

Soient Q'$= \{q: f^{-1}(-\infty, q)$ est borné par $\alpha_q\}$ et $\alpha = \{sup_{q\in\mathbb{Q}}\alpha_q\}$. Pour $\beta > \alpha$ on a $f(\beta) = sup_{q\in Q'}\alpha_q$, ainsi $f$ est constante au-dessus de $\beta$.

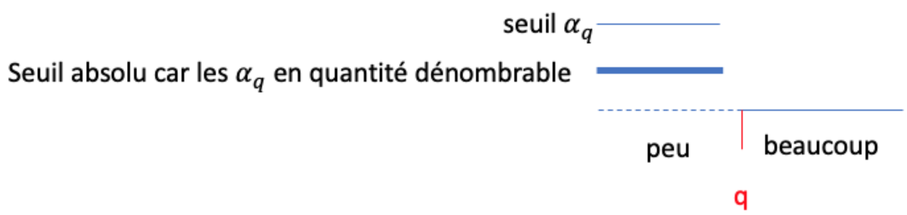



**Schéma 2.** *A propos d'une question de la quantité*

Considérons un sous-ensemble indénombrable de $\omega_1$ et $f$ une fonction continue à valeurs réelles du domaine X. Dans la perspective de vérifier ($*$) on identifie des $\alpha_\nu$ où $\nu < \omega_1$ vérifiant les conditions i), ii) et iii) dans preuve de l'alternative de dénombrabilité donnée ci-dessus. Dans le cas où $\lambda \in Lim \cap \omega_1$, $sup_{\nu<\lambda}\alpha_\nu$ ∈X on peut conclure de la même manière ; de plus $\{sup_{\nu<\lambda}\alpha_\nu : \lambda \in Lim \cap \omega_1\}$ est un club. Ainsi pour que la fonction soit finalement constante il est suffisant que X rencontre un club. Dans l'autre direction, considérons un club C $= \{\gamma_\nu : \nu < \omega_1\}$ disjoint de X. On définit $f$ : X → ℝ en posant $f(\alpha) = 0$ s'il existe $\nu < \omega_1$ tel que $\gamma_\nu < \alpha < \gamma_{\nu+1}$ et $\nu$ pair et $f(\alpha) = 1$ dans les autres cas ; ainsi *f* est continue mais n'est finalement pas constante. En conclusion :

*Pour un sous espace indénombrable X de $\omega_1$, toute fonction continue à valeur réelles de domaine X est finalement constante si et seulement si X rencontre tout club.*

Preuve : considérons un sous-espace métrisable et indénombrable de $\omega_1$ ; il ne peut donc pas être $\aleph_1$-compact. Soit $(\beta_\nu : \nu < \omega_1)$ un sous-ensemble discret, fermé et indénombrable de X. Pour $\lambda$ un ordinal limite $< \omega_1$, on pose $\gamma_\lambda = sup_{\nu<\lambda}\beta_\nu$. L'ensemble C $= \{\gamma_\lambda : \lambda \in Lim \cap \omega_1\}$ est fermé et non borné dans $\omega_1$ et vérifie l'intersection C $\cap$ X $= \emptyset$. Un tel type d'ensemble étant appelé un club il en résulte qu'*une condition nécessaire pour un $X \subset \omega_1$ soit métrisable est que X soit disjoint d'un club*. Dans l'autre direction, considérons un club C $= \{\gamma_\nu : \nu < \omega_1\}$ et X un ensemble disjoint de C ; pour $\nu < \omega_1$ $X_\nu = \{\delta \in X : \gamma_\nu < \delta < \gamma_{\nu+1}\}$ est un ouvert et fermé de X, *il est dénombrable, donc métrisable*. Par suite X est métrisable. En conclusion : *un sous espace X de $\omega_1$, est non métrisable si et seulement si X rencontre tout club.* □

*<u>Théorème de constance</u> : considérons maintenant une application f : cette application est constante si*

- *Si elle préserve l'ordre* *: $\omega_1 \rightarrow c$,*
- *Ou si elle préserve l'ordre inverse* *: $c \rightarrow \omega_1$ ,*
- *si elle est continue* *: $\omega_1 \rightarrow c$,*
- *Ou si l'application inverse est continue* *: $c \rightarrow \omega_1$ ,*

*Preuve* : dans la direction $\mathbb{R} \rightarrow \omega_1$, toute application continue est nécessairement constante. Dans l'autre direction, il suffit de considérer une formulation du lemme du pressoir sous la forme générale à savoir : pour $\kappa$ un cardinal indénombrable régulier et f une fonction continue f : S $\rightarrow X$ avec S $\subseteq \kappa$ ensemble stationnaire et X espace métrique. Alors l'application *f* est finalement constante. Cela est en particulier vrai pour S = $\kappa$ et X = $\mathbb{R}^n$. Comme *f* est continue, pour tout ordinal limite $\xi$ dans S, il existe $\xi_n < \xi$ tel que f''$[\xi_n, \xi] \subseteq B_{1/n}(f(\xi))$, où $B_{1/n}$ désigne la boule métrique de rayon $1/n$. En appliquant le lemme du pressoir, pour tout n il existe $\xi_n{}^* \in \kappa$ et un ensemble stationnaire T $\subseteq$ S $\cap$ Lim (avec Lim ensemble des ordinaux limites) tels que $\xi_n = \xi_n{}^*$ pour tout $\xi \in$ T. Il en résulte que f''$[\xi_n{}^*, \kappa[ \subseteq B_{2/n}(f(\xi_n{}^*))$. En considérant $\xi^* = sup_{n\in\mathbb{N}}\xi_n{}^*$, il vient $f$''$[\xi^*, \kappa[ \subseteq B_\eta(f(\xi^*))$ pour un $\eta$ quelconque. *Par conséquent, l'application f est constante au-dessus de $\xi^*$* □

*Un espace topologique est paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini, c'est-à-dire pour lequel tout point de X possède un voisinage disjoint de tous les éléments de ce recouvrement sauf une quantité finie de ses membres. Clairement tout espace compact est paracompact. Par ailleurs, tout espace métrisable est paracompact. Par conséquent, le résultat précédent montre qu'aucun ensemble stationnaire dans [0,□□] n'est paracompact, et partant n'est pas métrisable. <u>Ainsi, seuls les ensembles non stationnaires, c'est-à-dire les ensembles de mesure nulle, sont métrisables</u>.*

Le résultat est fondamental pour comprendre ce que représente la fonction ζ, aussi il paraît intéressant d'en produire une approche un peu différente qui permet de mettre en évidence que *la propriété de compression exploitée par le théorème de Fodor sert à compenser le défaut de connexité et de métrisabilité.*

### 2.3. *Connexité et compacité préservées par continuité de* $\mathbb{N}$ *:*

2.3.A L'analyse ordinale exposée en 2.2.A, débouchant sur le rôle des sous-ensembles stationnaires, met en évidence explicitement le rôle que joue la connexité. L'espace topologique $\mathbb{N}$ est discret, chaque point énuméré est séparé de son prédécesseur et de son successeur. En revanche, dans un domaine plongé dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *tout point, hormis éventuellement ceux situés sur la frontière d'un domaine, n'est ni séparé d'un prédécesseur, ni d'un successeur dans une énumération quelconque* compatible avec la topologie usuelle attachée à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le comportement des fonctions continues sur les ensembles stationnaires permet de comprendre qu'il convient de considérer la situation intermédiaire dans laquelle il existe une séparation, soit du côté des prédécesseurs, soit du côté des successeurs, dans une énumération appropriée[13]. *La définition additive de la fonction* $\zeta$ *induit une énumération qui engendre un tel état de séparation asymétrique.* Cela soulève alors la question de voir *sous quelles conditions il est envisageable de commuter séparation à gauche et séparation à droite* et quelle peut en être la signification. Auparavant il est nécessaire d'examiner comment se conjuguent les deux propriétés de compacité et de connexité avec la continuité

2.3.B *La donnée de la fonction* $\zeta$ *est appréhendée comme la construction d'un modèle de continu dans lequel l'arithmétique de Peano admet une représentation continue*. Or un espace topologique est un continu s'il est à la fois compact et connexe. De manière grossière, un espace connexe est en une seule composante fermée, en particulier en opposition avec les espaces discrets. On distingue plusieurs classes d'espaces fortement non connexes. En particulier il existe un lien avec la notion de dimension entendue comme entier non négatif ou valant l'infini. *En quelque sorte la dimension constitue une mesure de l'absence de connexité d'un espace*. Un espace topologique X est connexe si X ne peut pas être représenté sous la forme $X_1 \oplus X_2$ (union disjointe) où $X_1$ et $X_2$ sont des sous-espaces non vides de X[14].

*Propriétés équivalentes* :

(i) L'espace X est connexe.

(ii) L'ensemble vide et l'espace tout entier sont les seuls ouverts-fermés (clopen) de la topologie.

(iii) Si X $= X_1 \cup X_2$ avec $X_1$ et $X_2$ séparés ($X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset = X_2 \cap \overline{X_1}$), alors l'un des deux est vide.

(iv) Toute application continue $f$ : X $\rightarrow$ D de X vers l'espace discret à deux points D $= \{0,1\}$ est constante, c'est-à-dire que $f$ (X) $\subset \{0\}$ ou $f$ (X) $\subset \{1\}$

En particulier, l'équivalence entre (i) et (iv) met en évidence que *la connexité est un invariant des applications continues*. Par définition d'un espace de Tychonoff, si $x_1$ et $x_2$ sont deux points distincts, il existe une fonction continue $f$ : X $\rightarrow$ I telle que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 1$. Par effet d'invariance par $f$ il vient $f$(X) $=$ I, par conséquent $|X| \geq \boldsymbol{c}$ . Autrement dit : *Un espace de Tychonoff connexe et possédant au moins deux points est de cardinal supérieur à* $\boldsymbol{c}$.

Ce dernier lien constitue une justification du fait *qu'il faut atteindre la puissance du continu dans la construction de la fonction* $\zeta$. Par ailleurs, la propriété (ii) souligne que la connexité se traduit par une structure booléenne dégénérée. Or la fonction $\zeta$ est directement reliée à l'espace topologique

[13] Note de l'éditeur : Physiquement ceci semble correspondre à la présence partout d'une frontière considérée dans le sens amont ou aval. On voit là une situation qui pourrait être associée à une géométrie fractale donnant la frontière partout mais en aucun lieu (exemple triangle de Sierpinski).

[14] Certes la fonction zêta peut comme il a été montré être représentée dans un espace de dimension infini dans la base est constituée par les logarithmes des nombres premiers [RIP17] ; toutefois chaque point de zêta se trouve associé à $\mathbb{N}$ tout entier reliant les points à toutes les échelles et c'est cette association qui change le statut de la connexité associée à zêta. Les conséquences physiques sont considérables car dès lors zêta établit son statut de pontage entre le continu et le discret.

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

linéairement ordonné des ordinaux qui dispose d'une structure booléenne non triviale jusqu'à atteindre le seuil $\omega_1$, le premier ordinal indénombrable.

*Il en résulte un phénomène d'effacement de la structure booléenne dans l'intervalle* $[\omega_1,\mathbf{c}]$ *qu'il s'agit d'expliquer*.

2.3.C Par construction la fonction $\zeta$ met en jeu *les notions topologiques de* _**compacité**_ qui peut être abordée de différentes manières, cohérentes entre elles, au travers des foncteurs $\forall$ ou $\Pi$ et de leur topologie canoniquement associée, ou encore *de séparabilité* (par le truchement de la convergence séquentielle appréhendée grâce au filtre de Fréchet ) puisqu'il s'agit de faire émerger le continu en partant d'une topologie discrète attachée à l'ensemble $\mathbb{N}$, enfin *de connexité puisque la fonction* $\zeta$ *consiste à relier des points à toutes les échelles jusqu'à constituer un modèle de continu*. Le recours au corps des complexes est précisément justifié par *l'intérêt de disposer d'un modèle continu de l'arithmétique de Peano*. Il est alors judicieux de pouvoir *appréhender la continuité d'une fonction comme préservation de la compacité et de la connexité*. La combinaison de ces deux notions topologiques est particulièrement intéressante parce qu'elle admet une lecture catégorique immédiate reliée à l'opérateur diagonal et à l'isomorphisme fondamental caractérisant $\mathbb{N}$, et plus généralement les ordinaux infinis.

D'un point de vue catégorique, l'ensemble $\mathbb{N}$ qui représente le plus petit ordinal et cardinal infini vérifie l'isomorphisme fondamental : $X \times X \cong X$. Cet isomorphisme peut être décomposé comme un couple de deux morphismes élémentaires de directions opposées, à savoir : (i) $X \to X \times X$ et $X \to 1$, où 1 désigne ici un objet terminal et (ii) $X \times X \to X$, en supposant de plus la stabilité par image inverse permettant au premier morphisme d'en faire naitre un second . Si ces morphismes appartiennent à une classe de morphismes fermés, *autrement dit ils préservent un opérateur de clôture fixé, l'objet X est déclaré séparé dans le premier cas et compact dans le second*.

Enfin la notion de connexité est rattachée à l'existence d'une connexion de Galois[15], plus précisément une « *polarité* », mettant en correspondance une classe de morphismes et une classe d'objets. Une telle mise en forme a, par exemple, été explicitée dans la note d'Arhangel'skii et Wiegandt [ABS78] à la suite des travaux de Preuss : pour P et Q deux classes d'espaces topologiques issues d'une catégorie T ( on voit se dessiner le besoin de pont ) on définit deux opérateurs notés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ comme suit :

$$\mathcal{D}\ \mathrm{Q} = \{X \in T\colon toute\ application\ continue\ \varphi\colon Y \to X\ est\ constante\ pour\ tout\ Y \in Q\}$$

$$\mathcal{C}\ \mathrm{P} = \{X \in T\colon toute\ application\ continue\ \varphi\colon X \to Y\ est\ constante\ pour\ tout\ Y \in P\}$$

Une classe $\mathcal{D}$ Q est appelée une disconnexité et une classe $\mathcal{C}$ P une connexité, et les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont respectivement appelés *opérateurs de disconnexité et de connexité*.

2.3.D *Préservation de la compacité et de la connexité comme caractérisation de la continuité*. Une fonction $f : X \to Y$ entre deux espaces est préservatrice si l'image de tout compact de X est un compact de Y et l'image de tout sous-espace connexe de X est connexe dans Y. *Une fonction continue est ainsi toujours préservatrice*. La réciproque est vraie pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans quelle mesure ou sous quelles conditions peut-on *caractériser la continuité en termes de préservation*, sous des hypothèses suffisantes de séparation ?

[15] Il s'agit d'une correspondance particulière typiquement entre ensembles partiellement ordonnés. La connexion de Galois généralise un théorème de morphisme entre sous-groupes et sous-domaines. La connexion peut être évidemment monotone ou antitone. Il s'agit de cas particulier de foncteurs adjoints (à droite ou à gauche)

*On rappelle que (i) l'espace est $T_0$ ou Kolmogorov si pour deux points quelconques, au moins l'un des deux admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point ; (ii) l'espace est $T_1$ ou Fréchet si pour deux points quelconques il existe deux voisinages contenant un des deux points et pas l'autre, ce qui est équivalent au fait que tout singleton est fermé ; (iii) l'espace est $T_2$ ou Hausdorff si pour deux points quelconques il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement chaque point ; (iv) l'espace est $T_3$ ou régulier pour tout point et tout fermé ne contenant pas ce point, il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement ce point et ce fermé ; (v) l'espace est $T_{3\frac{1}{2}}$ ou Tychonoff si pour tout point et tout fermé ne contenant pas ce point, il existe une fonction $f: X \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f \restriction F = 1$.*

Lemme 1 **:** *soit une fonction préservatrice $f : X \longrightarrow Y$ où $Y$ est un espace de Tychonoff et $f$ n'est pas continue au point $p \in X$. Il existe alors une fonction $h : X \longrightarrow [0,1]$ qui n'est pas continue en $p$.*

*Preuve* : f n'étant pas continue en p, il existe un fermé $F \subset Y$ tel que $f(p) \notin F$ alors que p est point d'accumulation de $f^{-1}(F)$. Considérons une fonction continue $g : Y \to [0,1]$ vérifiant $g(f(p)) = 0$ et $g \restriction F \equiv 1$, ce qui est possible puisque Y est $T_{3\frac{1}{2}}$. Alors $h(x) = g(f(x))$ est une solution □

Lemme 2 **:** si $f : X \longrightarrow Y$ préserve la compacité avec Y Hausdorff et $M \subset X$ avec $\bar{M}$ compact ; alors pour tout point d'accumulation y de $f(M)$ il existe un point d'accumulation x de M tel que $f(x) = y$, ce qui signifie que $f(M)' \subset f(M')$

*Preuve*: $N = M - f^{-1}(y)$, $f(N) = f(M) - \{y\}$ et donc $y \in \overline{f(N)} - f(N)$. Par hypothèse sur $f$, $\overline{f(N)}$ est compact donc fermé dans Y, d'où $y \in f(\bar{N}) - f(N)$. Il en résulte qu'il existe un $x \in \bar{N} - N$ tel que $f(x) = y$ □

Corollaire : si $f : X \longrightarrow Y$ préserve la compacité avec Y Hausdorff, $\{ x_n : n < \omega\} \subset X$ converge vers $x \in X$ ; alors soit (i) $\{f(x_n): n < \omega\}$ converge vers $f(x)$, soit (ii) il existe un point $y \in Y$ distinct de $f(x)$ tel que $f(x_n) = y$ pour une infinité de valeurs de « n ». En particulier, si les images $f(x_n)$ sont tous distincts, alors elles doivent converger vers x.

Lemme 3 : si $f : X \longrightarrow Y$ préserve la connexité avec Y est un $T_1$-espace et $C \subset X$ un ensemble connexe alors $f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$

*Preuve* : soit $x \in \bar{C}$ alors $C \cup \{x\}$ est également connexe ; par hypothèse sur $f(C \cup \{x\}) = f(C) \cup \{f(x)\}$ est connexe, d'où il s'en suit que $f(x) \in \overline{f(C)}$.

Une fonction $f : X \to Y$ est dite localement constante au point $x \in X$ s'il existe un voisinage U de x sur lequel $f$ est constante.

Lemme 4 : soit $f : X \to Y$ préservant la connexité de l'espace X localement connexe vers un espace Y $T_1$-espace. Si $F \subset Y$ est fermé et $p \in \overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)$, alors p est dans la clôture de l'ensemble $\{x \in f^{-1}(F) : f \text{ n'estpas localement constante en } x\}$.

*Preuve* : considérons un voisinage ouvert connexe G de p et une composante C de $G \cap f^{-1}(F) \neq \emptyset$. C admet un point bord dans l'espace connexe G. Il s'en suit d'après le lemme 3 que $f(x) \in F$. Considérons un voisinage connexe $V \subset G$ de x, il s'en suit que $V \cup C$ est connexe avec $V - C \neq \emptyset$ puisque x est un point bord. Cela signifie que V n'est pas contenu dans $f^{-1}(F)$ et, partant, $f$ n'est pas localement constante en x.

Lemme 5 **:** soit $f$ : X → Y préservant la connexité vers un espace Y.$T_1$ avec X localement connexe au point p ∈ X et $f$ non localement constante en p. Alors $f$ (U) ∩ V est infini pour tout voisinage U de p et pour tout voisinage V de $f$ (p).

*Preuve* : considérons un voisinage connexe U de x ; $f$ (U) est connexe et admet au moins deux points puisque $f$ n'est pas localement constante. Ainsi, si V est un voisinage ouvert de Y contenant $f$(p), $f$(U) ∩ V n'est pas fini sinon $f$(p) serait un point isolé de l'ensemble connexe $f$(U) qui n'est pas un singleton □

Théorème de McMillan **:** si X est un espace de Fréchet localement connexe, alors toute fonction préservatrice dans un espace $T_2$ est continue.

*Preuve* : soit $f$ : X → Y préservatrice mais non séquentiellement continue au point p ∈ X. D'après le corollaire au lemme 2, il existe une suite $x_n$ → p telle que $f$($x_n$) = y ≠ $f$(p) pour tout $n < \omega$. D'après le lemme 4 appliqué à F = $\{y\}$, on peut supposer que $f$ n'est pas localement constante en tous les points $x_n$. Comme Y est un espace $T_2$, il existe un ouvert V ⊂ Y tel que y ∈ V et $f$(p) $\notin \bar{V}$. Grâce au lemme 5, l'image de tout voisinage de chaque point $x_n$ contient une infinité de points différents de y issus de V. On choisit de manière récursive des suites $\{x_k^n : \mathrm{k} < \omega\}$ convergeant vers $x_n$ pour tout n < $\omega$. Fixons un n et supposons que les points $x_k^m$ sont déjà définis pour m < n et k < $\omega$ tels que $f(x_k^m) \neq$ y. Par conséquent, $x_n$ est dans la clôture de l'ensemble $f^{-1}\left(V - (\{f(x_k^m) : \mathrm{m}, \mathrm{k} < n\} \cup \{y\})\right)$. Puisque X est un espace de Fréchet, la nouvelle suite $\{x_k^n : \mathrm{k} < \omega\}$ convergeant vers $x_n$ peut être prélevée dans cet ensemble. La suite $\{x_k^n : \mathrm{k} < \omega\}$ converge vers $x_n$ et $\{x_n : n < \omega\}$ converge vers p, on peut alors extraire une suite diagonale $\left\{x_{k_l}^{n_l} : \mathrm{l} < \omega\right\}$ convergeant vers p. La suite $\{n_l : l < \omega\}$ tend vers l'infini, en prélevant une sous-suite on peut supposer que $n_{l+1} >$ max $(n_l, k_l)$ pour tout $l < \omega$. La suite $\left\{f(x_{k_l}^{n_l}) : \mathrm{l} < \omega\right\}$ ne converge pas vers $f$(p) puisque $f$(p) $\notin \overline{\left\{f(x_{k_l}^{n_l}) : \mathrm{l} < \omega\right\}} \subset \bar{V}$, tandis que les points $f(x_{k_l}^{n_l})$ sont tous distincts ; ce fait contredit le corollaire du lemme 2 □

Nous obtenons ainsi le résultat important suivant : la continuité se caractérise essentiellement comme la préservation des deux propriétés de compacité et de connexité dans un contexte topologique qui s'applique à la situation concernant la fonction ζ . La propriété que nous exploiterons directement est exprimée par le corollaire du lemme 2.

## 2.4. *Modèle de continu adapté à la fonction ζ :*

2.4.A La fonction ζ peut être vue comme le produit cartésien de copies de l'ensemble ℕ selon une quantité ayant la puissance du continu. Un domaine du plan complexe, par exemple un compact appartenant à la bande critique *de la fonction ζ , constitue un ensemble ayant la puissance du continu. Les points d'un tel ensemble sont énumérables par référence à un certain bon ordre* ; bien entendu, la structure d'ordre linéaire associée n'a pas de lien de cohérence avec la structure de corps que possède ℂ puisque ce dernier n'est pas pourvu d'un ordre total. Néanmoins cette incohérence n'importe pas grâce au résultat important de la théorie des ordinaux usuellement dénommé lemme de Fodor.

*Les différentes copies de ℕ sont emboîtées de manière à garantir la compacité*. Cette propriété est effectivement procurée de manière analytique par la présence du signe moins devant l'exposant complexe « s=a+iθ » qui sert de variable via la fonction de puissance de « n ». Il convient de noter que cette dernière expression de *la compacité admet une explication à la fois ensembliste et catégorique* (voir 2.4.B).

La construction progressive de ζ comme produit de copies de ℕ paramétrée par un ordinal $\alpha$ appartenant à l'intervalle ordinal [0, **c**[ *consiste intuitivement à intercaler des points entre deux points* *extrémaux identifiés aux points 0 et $\infty$ sur la demi-droite réelle*[16]. Par itération, nous obtenons le plongement d'ensembles de points isomorphes à $\mathbb{N}$, puis à $\mathbb{Q}$ , puis des ensembles ayant toujours la puissance du dénombrable, jusqu'à au moins atteindre le seuil de l'indénombrable lorsque le paramètre ordinal $\alpha$ vaut $\omega_1$ , le premier ordinal indénombrable. Cette construction admet une autre représentation exprimée en termes de fonctions entières de croissance toujours plus élevée. Grâce à cette approche, nous expliquons que le schéma du co-noyau (voir chapitre 1 page 9 de la présente étude) admet un prolongement naturel en termes de construction des ordinaux. Au demeurant ce fait correspond exactement à l'approche historique initiale inaugurée par Cantor, créateur de la théorie des ordinaux.

A ce stade il est utile de dresser deux constats. Premièrement, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est à la fois dense dans $\mathbb{R}$, aussi bien dans la demi-droite réelle, mais de mesure nulle puisqu'ensemble dénombrable de singletons qui sont les ensembles élémentaires de mesure de Lebesgue nulle ; en revanche aucun intervalle fermé réel n'est de mesure nulle. Ce résultat est relié directement au théorème de Baire qui s'énonce notamment de la manière suivante : *L'intersection dénombrable de toute suite d'ensembles ouverts denses dans* $\mathbb{R}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$. Plus généralement, un espace topologique X est appelé espace de Baire si, étant donné une famille dénombrable $\{ U_n \}$ d'ouverts denses de X, il s'en suit que $\cap U_n$ est également dense dans X. Le théorème de la catégorie de Baire s'énonce : *tout espace compact est un espace de Baire.*

2.4.B Intuitivement la compactification mathématique consiste à ramener l'infini au fini. A titre d'exemple un entier générique « n » est relié à l'objet terminal $\omega$ qui est égal au plus petit ordinal infini, l'unique flèche correspondant au sous-ensemble $\{n, n+1, n+2, \dots, \omega\}$, matérialise le passage du fini à l'infini, donc restitue le processus de compactification dans la direction opposée. *D'une manière générale, dans un ensemble de cardinal infini, la collection des sous-ensembles de cardinal infini constitue un filtre particulier, celui des sous-ensembles co-finis, encore appelé filtre de Fréchet*. La substitution d'un élément par un ensemble infini dénombrable de nouveaux points peut être appréhendée comme l'identification du point initial comme objet terminal pour le nouvel ensemble qui le remplace. Par conséquent, *l'empilement des copies de* $\mathbb{N}$ *peut être représenté comme la construction d'une succession de suites convergentes et emboîtées*. La compactification itérée est mise en œuvre au travers du filtre de Fréchet pour lequel *la relation d'ordre d'inclusion est définie à un sous-ensemble fini près*. Cela est traduit par le fait que l'argument complexe « s » de la fonction $\zeta$ est systématiquement affecté du signe moins, ce qui permet de garantir la convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n^{-s})$. Ce fait trouve également une explication de nature catégorique en se référant aux travaux d'André Joyal concernant les foncteurs analytiques [JOA06].

Le type de convergence topologique mise en œuvre repose sur l'emploi de suites ; cela induit une conséquence fondamentale puisqu'avec des suites paramétrées par des ordinaux $\alpha_i$ , la convergence associée à leur composition n'excède pas $\cup_{i\in I} \alpha_i$ . Partant du plus petit ordinal infini dénombrable, l'ordinal ultime atteignable par de telles constructions est le $sup_{i\in I}\, \alpha_i = \omega_1$ qui est, par définition, le plus petit ordinal indénombrable. Or la fonction $\zeta$ s'obtient en prolongeant l'empilement de copies de $\mathbb{N}$ jusqu'à atteindre le continu **c** . Comme cela est bien établi depuis les travaux majeurs de Gödel et Cohen, la théorie des ensemble ZFC est insuffisamment pour déterminer la nature et les propriétés des ordinaux à partir de $\omega_1$. Il en résulte que les propriétés de $\zeta$ sont partiellement indéterminées.

---

[16] Note de l'éditeur : on verra dans la note numéro 3 du présent développement qu'au plan pratique, en particulier en analyse harmonique, cette compaction d'information peut opérer dans une octave précisément du fait de l'autosimilarité des nombres naturels : $\mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cette compaction conduit précisément à une ségrégation en $w_1$ entre un ensemble de singularités mesure nulle et un ensemble d'intervalles ouverts de mesure unité.

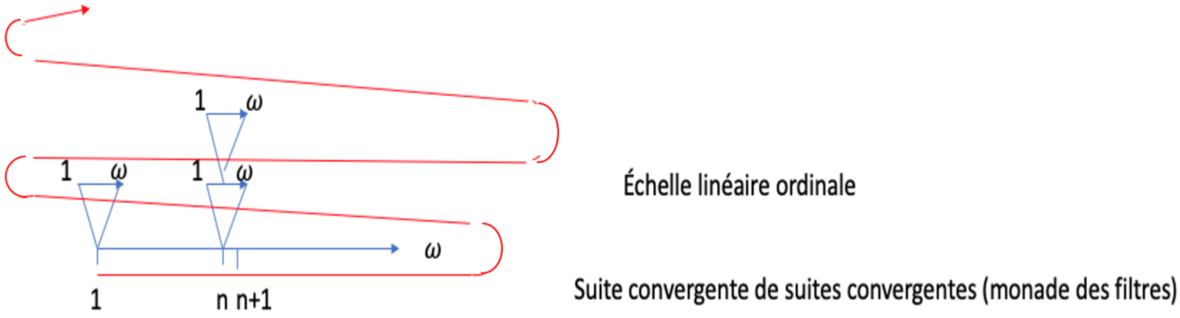



**Figure 4.** *Représentation schématique de stratification correspondant à la construction de la fonction zêta. On verra au plan pratique dans le 3ème chapitre physique de la présente étude (Le Méhauté volume 3) comment cette stratification joue un rôle déterminant dans la définition de l'entropie des systèmes dynamiques (Voir aussi [LET22])*

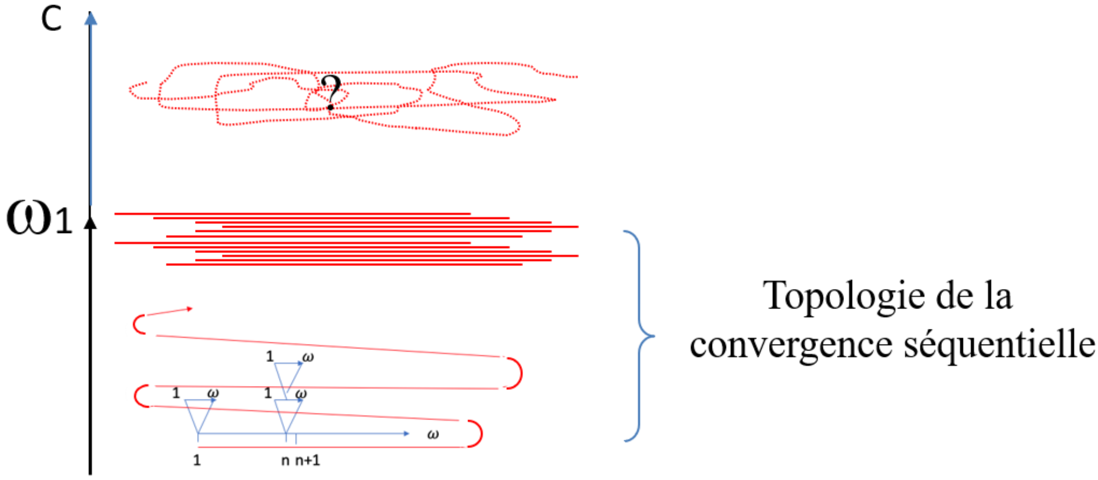



**Figure 5.** *Représentation schématique de stratification correspondant à la construction de la fonction zêta. Mise en évidence du rôle du premier ensemble non dénombrable.*

Comme indiqué ci-dessus la présence du signe moins dans l'exposant de la série de Dirichlet $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ $(n^{-s})$, avec s parcourant un domaine K par exemple connexe et compact, est justifiée par la nécessité de garantir la convergence de la série. *L'entité peut être lue comme une structure fibrée de base* ℕ *et de fibre continue*. L'énumération des points s'exprime d'une autre manière comme *emboîtement d'énumérations itérées des entiers naturels dans laquelle le passage d'une série à la suivante s'effectue grâce à la relation de co-finitude associée à la présence du filtre de Fréchet*. Quand la variable *s* parcourt un domaine continu cela revient à construire l'arbre canonique d'indice de ramification constant, valant ω ou encore $\aleph_0$, et de hauteur **c** . Comme il existe une relation biunivoque bien établie entre un tel arbre et une structure linéairement ordonnée, il apparaît explicitement que la donnée de la fonction ζ consiste finalement à *parcourir l'espace topologique des ordinaux*. La consistance analytique de la fonction repose sur le principe de *convergence de la concaténation de séries convergentes* dans laquelle chacune est définie comme image de l'ensemble des entiers naturels ; autrement dit la construction repose totalement sur la *topologie séquentielle amenée par le filtre des ensembles cofinis de Fréchet*. Par définition du premier ordinal indénombrable, la limite supérieure admissible est fournie par cet ordinal $\omega_1$ . *Le comportement de ζ à partir de $\omega_1$ n'est pas déterminé sauf à introduire un axiome supplémentaire* permettant de contrôler le phénomène de saturation qui apparaît dès ce seuil franchi.

2.4.C Dans le prolongement de ce qui précède et donc comme il faut, dans la construction de $\zeta$, au moins atteindre le seuil $\omega_1$, il doit exister une quantité suffisante de fonctions croissantes qui atteignent ce seuil.

Preuve : Considérons l'espace $\mathbf{W}^* = [0, w_1]$ *compact pour la topologie d'ordre*. Grâce au théorème de Tychonoff, $X=(\mathbf{W}^*)^{\mathbb{N}}$ est compact ; ainsi pour $\sigma < \omega_1$, $U_\sigma = \{f \in X : f(n) \in (\sigma, \omega_1) \textit{pour un certain } n \in \mathbb{N}\}$ est un ouvert dense, avec le cardinal $|\{U_\sigma : \sigma < \omega_1\}| = \aleph_1$. Pour un $f \in X$, $f(\mathbb{N}) \cap [0, \omega_1[$ est dénombrable, cela signifie qu'il existe $\sigma < \omega_1$ tel que $f(\mathbb{N}) \subset [0, \sigma] \cup \{\omega_1\}$ ; cela implique $f \notin U_\sigma$ et donc $\cap \{U_\sigma : \sigma < \omega_1\} = \emptyset$ □

Dès que le seuil $\omega_1$ serait éventuellement franchi, la propriété de Baire deviendrait invalide alors même que, par construction de $\zeta$ un ensemble de type $\cap \{U_\sigma : \sigma < \omega_1\}$ ne peut pas être vide mais de plus doit être grand, et même dense ; en outre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ou encore *la surface de Riemann engendrée par la fonction* $\zeta$ *sont des espaces de Baire*. Il paraît ainsi pertinent de faire l'hypothèse que l'espace construit par $\zeta$ vérifie la condition additionnelle suivante : *Soient X un espace compact,* $\mathcal{U}$ *une famille d'ouverts denses dans X vérifiant* $|\mathcal{U}| < 2^{\aleph_0}$ *; alors* $\cap \mathcal{U}$ *est dense dans X*. Si l'énoncé précédent est vérifié en l'état et compte tenu du raisonnement précédent, l'égalité $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, c'est-à-dire l'hypothèse du continu (HC), s'impose.

En fait la condition additionnelle qui vient d'être formulée est amendable en introduisant une restriction sur la nature de l'espace construit, en constatant que la construction de $\zeta$ est réalisée sous la contrainte forte de respecter la structure arithmétique consistant à imposer la factorisation en facteurs premiers. Cette structure impose donc une condition de dénombrabilité et d'énumérabilité que l'on est en mesure de traduire en termes de condition de chaîne dénombrable. Ce constat débouche sur l'introduction d'une condition qui s'avère être *un axiome supplémentaire et indépendant de la théorie des ensembles notée sous l'acronyme ZFC, à savoir l'axiome de Martin*.

On rappelle que l'hypothèse du continu (HC) consiste à affirmer qu'il n'existe pas d'ensemble $S$ vérifiant $\aleph_0 < |S| < \mathbf{c}$. Elle présente le mérite d'évacuer la difficulté de manipuler théoriquement des ensembles qu'il serait impossible à décrire effectivement, puisqu'au-delà du dénombrable nous sommes syntaxiquement démunis pour identifier les objets. De plus, l'HC revient à caractériser un ensemble vérifiant $|S| < 2^{\aleph_0}$ comme étant dénombrable. L'infirmation de la HC a pour conséquence que l'on peut munir un continu, en particulier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, *d'un bon ordre tel que tout élément admet une quantité dénombrable de prédécesseurs*, ce qui semble a priori contre-intuitif. *Or nous verrons que c'est exactement ce que permet* $\zeta$. Si un ensemble vérifiant $|S| < 2^{\aleph_0}$ est dénombrable sous HC, *il semble raisonnable de considérer l'élargissement qui substitue à la caractérisation de dénombrabilité celle d'être de mesure de Lebesgue nulle*[17] ; cette option correspond exactement à l'adoption de l'axiome de Martin.

2.4.D A ce stade d'analyse, il apparaît opportun de rappeler les éléments de base du théorème de Baire, étape essentielle pour *comprendre comment le dénombrable et le continu s'articulent* entre eux. Il est en particulier instructif de rappeler la façon suivante de présenter le procédé diagonal de Cantor :

Théorème de Cantor : *pour toute suite de réels* $\{a_n\}$ *et pour tout intervalle I, il existe un point p dans I tel que* $p \neq a_n$ *pour tout n.*

*Preuve* : soit $I_1$ sous-intervalle fermé tel que $a_1 \notin I_1$, puis $I_2$ un sous-intervalle fermé de $I_1$ tel que $a_2 \notin I_2$. Par itération, on peut définir $I_n$ sous-intervalle fermé de $I_{n-1}$ tel que $a_n \notin I_n$. On aboutit ainsi à

[17] On notera l'importance pratique de cette remarque lorsqu'on aura à considérer des objets fractals comme des objets auxquels nous souhaiterions accorder une réalité physique.

*une suite emboîtée d'intervalles fermés qui admet une intersection non vide*. Si $p \in \cap I_n$, ce point vérifie $p \neq a_n$ pour tout n □

Ce schéma de raisonnement peut être reconduit avec des objets plus gros que les points, ou singletons, comme les $\{a_n\}$ précédents. Une nouvelle définition est introduite. Rappelons qu'un ensemble A est dense dans l'intervalle $I$ si A admet une intersection non vide avec tout sous-intervalle de $I$ (*$I$ peut être remplacé par la droite réelle*). En revanche, l'ensemble A est nulle part dense, s'il n'est dense dans aucun intervalle ; autrement dit, tout intervalle admet un sous-intervalle situé dans le complément de A. Ainsi A est nulle part dense si et seulement si son complément $\complement A$ contient un ouvert dense, si et seulement si sa clôture $\bar{A}$ ne possède pas de point intérieur. Le même schéma de démonstration permet d'affirmer :

*Tout sous-ensemble d'un ensemble, nulle part dense est nulle part dense, l'union d'un nombre fini d'ensembles nul part denses est nul part dense, la clôture d'un ensemble nulle part dense est nul part dense.*

*Preuve* : $A_1$ et $A_2$ étant nulle part denses, pour tout intervalle $I$ il existe un intervalle $I_1 \subset I - A_1$ et un intervalle $I_2 \subset I_1 - A_2$ ; cela induit $I_2 \subset I - (A_1 \cup A_2)$, et signifie que $A_1 \cup A_2$ est nulle part dense. Finalement, un intervalle ouvert contenu dans le complémentaire $\complement A$, il est également contenu dans $\complement \bar{A}$ □

Cependant, il apparaît une différence essentielle entre l'ensemble qui vient d'être défini et les points isolés ; *une union dénombrable d'ensembles nul part denses n'est en général pas nul part dense*. Il suffit de considérer l'exemple canonique de l'ensembles des nombres rationnels dans la droite réelle ℝ, il s'agit d'un sous-ensemble dense, qui est par ailleurs union dénombrable de singletons, or chaque singleton est nulle part dense. Cet exemple s'inscrit totalement dans le contexte de la construction de la fonction ζ. Ce constat simple et capital a amené Baire à introduire une distinction importante dans son étude de 1899. *Un ensemble est dit de première catégorie* s'il peut être représenté comme *union dénombrable d'ensembles nulle part denses*. Le schéma de démonstration s'applique et débouche sur le fameux théorème dit théorème de Baire :

<u>Théorème de Baire</u> *: le complément de tout ensemble de première catégorie sur la droite réelle est dense. Aucun intervalle de ℝ n'est de première catégorie. L'intersection de toute suite d'ensembles ouverts denses est dense.*

*Preuve* : les trois énoncés sont équivalents. Il suffit de vérifier le premier. Soit $A = \cup A_n$, une représentation de $A$ comme union dénombrable d'ensembles nulle part denses. Pour un intervalle quelconque $I$, il existe un sous-intervalle fermé $I_1 \subset I - A_1$ ; puis un sous-intervalle fermé $I_2 \subset I_1 - A_2$. En itérant on aboutit à $\cap I_n$non vide dans $I - A$, ainsi $\complement A$ est dense □

Il convient de relever les propriétés de stabilité que satisfont les types d'ensembles qui ont été précédemment envisagés. Comme une classe d'ensembles stables par unions dénombrables et par l'opération de sur-ensemble constitue un $\sigma$-idéal, il en résulte que *la classe des ensembles de première catégorie et la classe des ensembles dénombrables sont des exemples de $\sigma$-idéaux.* Une autre manière d'aborder les ensembles précédents consiste à voir comment ils se comportent vis-à-vis d'une mesure. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble nul, c'est-à-dire de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles $I_n$ tels que $A \subset \cup I_n$ et $\Sigma\lambda(I_n) < \varepsilon$. Naturellement, un singleton est un ensemble nul, et tout sous-ensemble d'un ensemble nul est nul. De plus : *Une union dénombrable d'ensembles nuls est un ensemble nul.*

Preuve : soient $A_i$ des ensembles nuls, $i = 0, 1, \ldots$ ; il existe une suite d'intervalles $I_{ij}$ avec $j = 0, 1, \ldots$ tels que $A_i \subset \bigcup_j I_{ij}$ et $\sum_j \lambda(I_{ij}) < \varepsilon/_{2^i}$. La collection totale des $I_{ij}$ couvre $A$ avec $\sum_{ij} \lambda(I_{ij}) < \varepsilon$ ; donc $A$ est un ensemble nul. Par conséquent, les ensembles nuls forment un $\sigma$-idéal □

L'intérêt de faire appel à la théorie de la mesure réside ici dans le fait qu'elle opère une distinction entre un ensemble continu connexe, dont le paradigme est fourni par un intervalle réel, et les ensembles nuls. Cette distinction repose sur le théorème classique de Borel :

Théorème de Borel : si une suite d'intervalles $I_n$ recouvre un intervalle I, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) \geq \lambda(I)$ .

*Preuve* : soit $I = [a, b]$ fermé et suite $I_n$ d'ouverts. Désignons par $(a_1, b_1)$ le premier intervalle comprenant $a$, si $b_1 \leq b$, on désigne par $(a_2, b_2)$ le premier intervalle contenant $b_1$. En itérant, si $b_{n-1} \leq b$, $(a_n, b_n)$ est le premier intervalle contenant $b_{n-1}$. Le procédé se termine en un point $b_N > b$, sinon il existerait une suite croissante $\{b_n\}$, qui converge nécessairement vers une limite $x \leq b$. Ce point appartient à l'un des intervalles $I_k$. Presque tous les intervalles $(a_n, b_n)$ précèdent $I_k$, à savoir ceux pour lesquels $b_{n-1} \in I_k$. Cela est impossible puisqu'aucun de ces intervalles ne sont égaux entre eux. Nous avons les inégalités : $b - a < b_N - a_1 = \sum_{i=2}^{N}(b_i - b_{i-1}) + b_1 - a_1 \leq \sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i)$. Le résultat est acquis. Dans le cas général, si $\alpha > 1$, $J$ un sous-intervalle fermé de $I$ vérifiant $\lambda(J) = {}^{\lambda(I)}/_{\alpha}$, $J_n$ intervalle ouvert contenant $I_n$ tel que $\lambda(J_n) = \alpha\lambda(I_n)$. Ainsi $J$ est recouvert par la suite$\{J_n\}$ et $\Sigma\lambda(J_n) \geq \lambda(J)$. Par suite $\Sigma\lambda(I_n) = \Sigma\lambda(J_n) \geq \lambda(J) = {}^{\lambda(I)}/_{\alpha}$ et en appliquant $\alpha \to 1$ □.

La conséquence importante résultant de ce théorème est *qu'aucun intervalle n'est un ensemble de mesure nulle* ; en revanche l'ensemble $\mathbb{Q}$, dense dans $\mathbb{R}$, est un ensemble nul comme tout ensemble dénombrable. Ainsi *les ensembles nuls constituent une classe particulière intermédiaire entre le dénombrable et le continu. Ce fait suggère une voie de passage entre ces deux notions : le dénombrable et le continu.*

2.4.E Selon la définition additive de la fonction $\zeta$ , celle-ci peut être appréhendée comme *énumération de couples* $\langle n, -s \rangle$ où n parcourt $\mathbb{N}$ et « s » parcourt un domaine usuellement compact du plan complexe. Le fait de substituer à un domaine compact complexe un ordinal, en l'occurrence l'ordinal identifiable au cardinal ***c*** , est possible *en recourant à un bon ordre* permis par le résultat de Zermelo. La nature catégorique de la fonction $\zeta$ justifie que l'on puisse la lire comme produit cartésien de copies de l'ensemble $\mathbb{N}$ avec pour taille unitaire la puissance du continu, *ou encore comme espace de fonctions de **c** dans $\mathbb{N}$* Comme nous venons de le mentionner, *construire* $\zeta$ *consiste à élaborer des suites de longueur **c** dans* $\mathbb{N}$. Cela repose nécessairement sur *le théorème de la récursivité* qui affirme que toute suite du type précédent est bâtie selon une procédure *matérialisée par une fonction allant de l'espace des suites de longueur **c** dans* $\mathbb{N}$ *; cette fonction n'est ni plus ni moins que la fonction* $\zeta$ elle-même[18]. *En théorie de la récursivité, une telle fonction est appelée* *un oracle*. Nous verrons ultérieurement que $\zeta$ est simplement justifiée comme *prolongement naturel de la loi de distributivité* ; en quelque sorte elle émane de la structure interne de $\mathbb{N}$. Nous résumons la situation en affirmant :

*La fonction $\zeta$ est une représentante de l'oracle naturel $\mathbb{N}$ associé à pour les suites de longueur **c**=**2**$^{\aleph_0}$. Il paraît alors judicieux de l'appeler encore : oracle distributif de* $\mathbb{N}$

Le procédé diagonal dû à Cantor ***c*=2**$^{\aleph_0} > \aleph_0$ et le théorème de récursivité implique alors que la construction de $\zeta$ consiste en *un procédé récursif transfini allant jusqu'à atteindre la puissance du continu*. Un schéma classique pour construire des objets par induction transfinie repose sur un

[18] Note de l'éditeur : On verra d'ailleurs dans la note 3 du présent travail que le rôle physique de la fonction zêta dans les procédures récursives conjugue, conformément aux remarques de William Lawvere concernant les catégories, les quantités d'espaces (extensités dénombrables ) et l'espace des quantités (Intensités fonctions continues ).

argument de diagonalisation. Trouver un sous-ensemble S d'un ensemble X en rapport avec une famille $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha < \kappa\}$ consiste à bâtir $S = \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ en prélevant des éléments $x_\xi$ dans chaque $P_\xi$. La difficulté apparaît quand le cardinal κ est trop gros comparé à la liberté de choix des $x_\xi$, notamment dans le cas où l'ensemble X est de cardinal inférieur à $\kappa$. Un ordre partiel $\mathbb{P}$ est utilisé pour construire un objet de manière inductive ; les éléments de $\mathbb{P}$ , autrement dit *des conditions*, fournissent une description de l'état courant de l'induction. Chaque étape inductive prend en compte la présence d'un ensemble particulier dense, disons $D_x = \{p \in \mathbb{P} : \varphi(p, x)\}$ de sorte que le passage de la condition $q$ à la condition $p$ s'effectue en garantissant le respect de la propriété $\varphi(p, x)$. La famille $\mathcal{D}$ de sous-ensembles denses de $\mathbb{P}$ constitue l'ensemble des conditions inductives qui doivent être prises en compte, un filtre $\mathcal{D}$-générique dans $\mathbb{P}$ permet de tenir compte de toutes les exigences afin d'aboutir à l'objet visé en tant qu'oracle selon le théorème de récursivité. Si la taille $|\mathcal{D}|$ n'excède pas le nombre d'étapes d'induction, cette dernière est généralement conclue favorablement. Une difficulté surgit en général si la taille $|\mathcal{D}|$ excède le nombre total d'étapes d'induction.

Nous rappelons que *la notion de filtre se rapporte, en faisant usage des fonctions caractéristiques, à la construction récursive pilotée par une structure ordonnée d'un objet ensembliste par prolongement de fonctions à valeurs booléennes binaires*. Dans un ordre partiel[19] $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ une paire $p \leq q$ se lit « $p$ prolonge $q$ » ; les éléments de $\mathbb{P}$ sont les *conditions*. Les éléments $p$ et $q$ sont dits compatibles si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{P}$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$, ce qui signifient *qu'ils admettent un prolongement commun*. Dans le cas où $\mathbb{P} = \omega_1$, tout sous-ensemble est une chaîne et toute anti-chaîne est de cardinal $\leq 1$, dont $\mathbb{P}$ est « ccd ». Si $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ avec $p \leq q \Leftrightarrow p \subset q$ ; donc $p \perp q \Leftrightarrow p \cap q = \emptyset$. $A \subset \mathbb{P}$ est une anti-chaîne si et seulement si les éléments de $A$ sont deux à deux disjoints (un exemple typique est l'ensemble des nombres premiers), donc $\mathbb{P}$ est ccd si et seulement si $|X| \leq \omega$. Un sous-ensemble $D \subset \mathbb{P}$ est dense dans $\mathbb{P}$ si et seulement si $\forall p \in \mathbb{P}\, \exists q \leq p\ (q \in D)$ ; cela signifie que tout élément peut être prolongé de manière à appartenir à $D$, autrement dit à respecter les conditions qui caractérisent cette appartenance.

*Un sous-ensemble $G \subset \mathbb{P}$ est un filtre si et seulement si*

(a) $\forall p, q \in G\ \exists r \in G\ (r \leq p$ et $r \leq q)$
(b) $\forall p \in G\ \forall q \in G\ (q \leq p \rightarrow q \in G)$

Les *conditions*, ou éléments de $\mathbb{P}$, apportent une information sur $G$ ou sur un objet directement attaché à $G$ ; si $p$ prolonge $q$, alors $p$ apporte plus d'information que $q$.

2.4.F Nous pouvons maintenant introduire l'énoncé de Axiome de Martin ou AM(κ) et plus généralement l'énoncé : AM($\kappa$) $\forall \kappa < 2^\omega$ qui impose le respect des conditions énoncées ci-dessus , en formant une famille $\mathcal{D}$ de sous-ensembles denses de $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ de tailles $\leq \kappa$ comme *Ensemble Partiellement Ordonné* (EPO ccd) grâce à l'existence d'un filtre G dans $\mathbb{P}$ tel que $\forall D \in \mathcal{D}\ (G \cap D \neq \emptyset)$. et. La condition de chaine dénombrable (ccd)[20], s'avère indispensable comme les exemples canoniques de l'annexe 1 le montrent.

[19] Ordonnancement partiel est une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Il permet certaines comparaisons mais certains éléments sont incomparables. Un arbre généalogique est une structure d'ordre partiel ( par exemple 2 sœurs entre elles n'entrent pas dans l'ordonnancement). L'ensemble des parties d'un ensemble donné, muni de l'inclusion forme un ensemble partiellement ordonné. Si l'ensemble donné est fini, son ensemble des parties est fini. En anglais une telle structure est un « poset »

[20] On dit que $E$ vérifie la condition de chaîne dénombrable lorsque toute anti-chaîne forte de $E$ est au plus dénombrable. On dit qu'un espace topologique $E$ vérifie la condition de chaîne dénombrable lorsque l'ensemble de ses ouverts non vides, ordonné par l'inclusion, vérifie la condition de chaîne dénombrable comme défini ci-dessus. Cela revient à dire que toute famille d'ouverts non vides de $E$ deux à deux disjoints est au plus

2.4.G) Comme déjà indiqué, la construction de ζ consiste à empiler des copies de ℕ au moins jusqu'au niveau $\omega_1$, le premier ordinal indénombrable. Il est par conséquent instructif de remplacer les fonctions binaires $f:\omega \to 2$, correspondant à la simple identification des sous-ensembles de ℕ, par des fonctions $f:\omega \to \omega_1$ qui sont alors identifiées à leur graphe, c'est-à-dire à des sous-ensembles de $\omega \times \omega_1$. *Notons qu'une fonction générique ne peut jamais être surjective dans ce cas de figure*.

Preuve : Soit $\mathbb{P} = \{p: p \subset \omega \times \omega_1 \; et \; |p| < \omega \; et \; p \; fonction\}$ et G un filtre dans $\mathbb{P}$, $\cup G$ est alors une fonction vérifiant $dom(\cup G) \subset \omega$ et $im(\cup G) \subset \omega_1$. Considérons la famille de conditions imposant qu'un élément $\alpha < \omega_1$ soit dans l'image des fonctions admissibles, il s'agit des $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P}: \alpha \in im(p)\}$, famille naturellement dense. S'il existait un filtre G générique dans $\mathbb{P}$ : $\forall \alpha < \omega_1 \; (G \cap D_\alpha \neq \emptyset)$, on obtiendrait $im(\cup G) = \omega_1$, ce qui signifierait la surjectivité, impossible. Par ailleurs, $\mathbb{P}$ n'est pas ccd puisque l'ensemble indénombrable de conditions correspondant aux graphes des fonctions particulières, $\{\langle 0, \alpha \rangle\}$ pour $\alpha \in \omega_1$, sont mutuellement incompatibles □

*Le point essentiel à pointer à ce stade de l'analyse réside dans le fait que la construction de ζ impose la restriction ccd et que cela ne peut se faire ici que par le truchement de l'ensemble des entiers premiers qui sont incomparables entre eux.*

Passer le seuil $\omega_1$, revient à considérer une structure d'ordre plus générale basée sur l'interprétation ensembliste déjà mise en exergue à plusieurs reprises ci-dessus dans laquelle un entier est représenté comme *un couple d'ensembles* $\langle I, A \rangle$ *regroupant un premier ensemble fini et un second infini. Rappelons que l'objectif visé consiste à faire émerger une nouvelle structure d'ordre au travers d'un filtre générique*. L'idée intuitive consiste à insister sur le fait qu'en appréhendant un entier comme représenté par un ensemble fini de cardinal cet entier, un faisceau de flèches terminales y est alors naturellement attaché comprenant une quantité variable finie de segments terminaux représentées par des sous-ensembles de ℕ admettant une quantité infinie dénombrable de points ; *il est alors nécessaire de rendre compte d'une double structure d'ordre*, d'une part (i) celle naturellement attachée à la structure d'ordre naturelle de ℕ, d'autre part (ii) une seconde structure d'ordre visant à matérialiser la multiplicité de représentation des flèches terminales. Cette distinction exige alors de mettre en cohérence ces deux structures d'ordre précisément par le truchement d'un filtre générique comme le montre l'annexe 2.

Grâce à l'obtention de ce filtre, une famille de grande taille κ où $\omega \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$, peut toujours être scinder en deux sous-familles de telle sorte que l'on y chemine en évitant presque totalement tous les éléments de la première sous-famille en pénétrant de manière infiniment longue tout élément de la seconde sous-famille[21]. On obtient ainsi un procédé d'énumération, donc de codage, des sous-ensembles de κ par des sous-ensembles de ω.

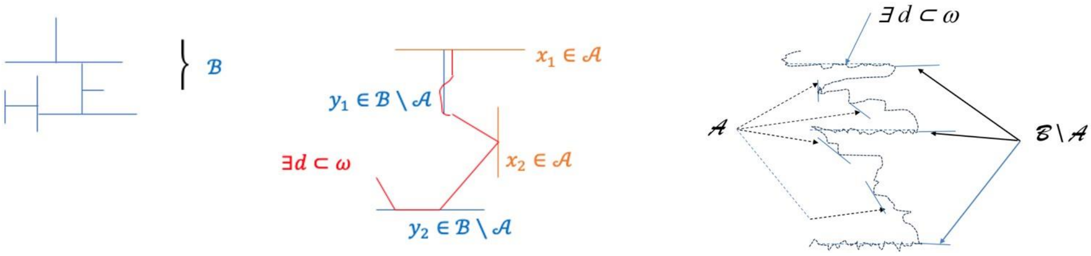



**Figure 6.** *Représentation schématique des deux sous-familles peuvent être agencées afin d'obtenir un codage prenant la forme indiquée dans le texte.*

---

dénombrable. On dit alors que sa *cellularité* est au plus dénombrable. Par exemple, la cellularité d'un espace discret est égale à son cardinal. Si un espace est séparable alors il vérifie la condition de chaîne dénombrable

[21] Note de l'éditeur : cette observation sera confirmée explicitement dans ses conséquences physique dans le chapitre physique N°3 de la présente étude (Volume 3 projet Lîla Entropie)

Par anticipation sur la suite de notre approche, la configuration précédente suggère un codage de l'espace de points engendré par la fonction $\zeta$ *qui est précisément celui qui est décrit dans l'inégalité fonctionnelle de Bagchi pointant en particulier le rôle de l'autosimilarité [RIP17]*. Cette intuition débouche sur *l'hypothèse qu'une formulation adéquate de l'axiome de Martin consiste à valider l'inégalité fonctionnelle de Bagchi*, dont on sait par ailleurs qu'il s'agit d'un énoncé équivalent à la conjecture de Riemann. La suite de l'étude porte sur la confirmation de cette hypothèse. Pour clore cette partie, il convient d'observer que *l'axiome de Martin (AM) peut être vu comme une généralisation du théorème de Baire qui correspond exactement au cas où* $\kappa = \omega$.

## 2.5. *Une lecture Booléenne de la fonction $\zeta$ : la distributivité infinie et une formulation faible de l'axiome de Martin*

Les résultats relatifs aux algèbres de Boole qui suivent sont issus de l'ouvrage de référence [HBA00]

2.5.A *Distributivité infinie* : Supposons que l'on dispose de sommes en quantité finie $s_i = \sum_{j\in J} a_{ij}$ pour i $\in I$ ; si en considérant une fonction de choix $f$ : i $\rightarrow$ j on prélève un terme $a_{if(i)}$ de chaque somme afin d'obtenir le produit $\prod_{i\in I} a_{if(i)}$ ; si maintenant on somme ces différents produits en balayant l'ensemble des fonctions de choix possible il est connu qu'on obtient le produit de toutes les sommes $\prod_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij}$. *Ce mode de calcul n'est plus valide en général lorsque l'un des ensembles d'indices devient infini. Dans certaines circonstances toutefois la distributivité s'étend cependant à des configurations infinies.*

Il est aisé de comprendre en quoi *la distributivité* consiste en interprétant les deux opérateurs $\Pi$ et $\Sigma$ comme opérateurs booléens ET et OU. La grandeur $\prod_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij}$ consiste à disperser les éléments dans différentes boîtes étiquetées par les indices i, dans chaque boîte les éléments sont répertoriés par le second indice j. Un élément est prélevé dans chaque boîte puis l'ensemble des boîtes est inspecté dans l'ordre croissant des premiers indices, cela crée une courbe regroupant la collection $\langle i, a_{ij} \rangle$. Comme il existe une multitude de choix dans chaque boîte, il existe une multitude de courbes possibles. *Une fonction de choix consiste à déterminer un élément minimal pour un certain ordre attaché à chaque boîte*, l'opération effectuée dans chaque boîte engendre une courbe par conjonction (ET). Puisqu'il existe de multiples ordres envisageables dans chaque boîte, il en résulte finalement une collection disjonctive de courbes reliant les éléments minimaux et impliquant l'opérateur OU. Il est important de souligner que le mécanisme mis en jeu est basé sur la notion de bon ordre par le truchement d'une fonction de choix. *De plus la distributivité se lit par l'intermédiaire de partitions* [TOS88] (TVB87].

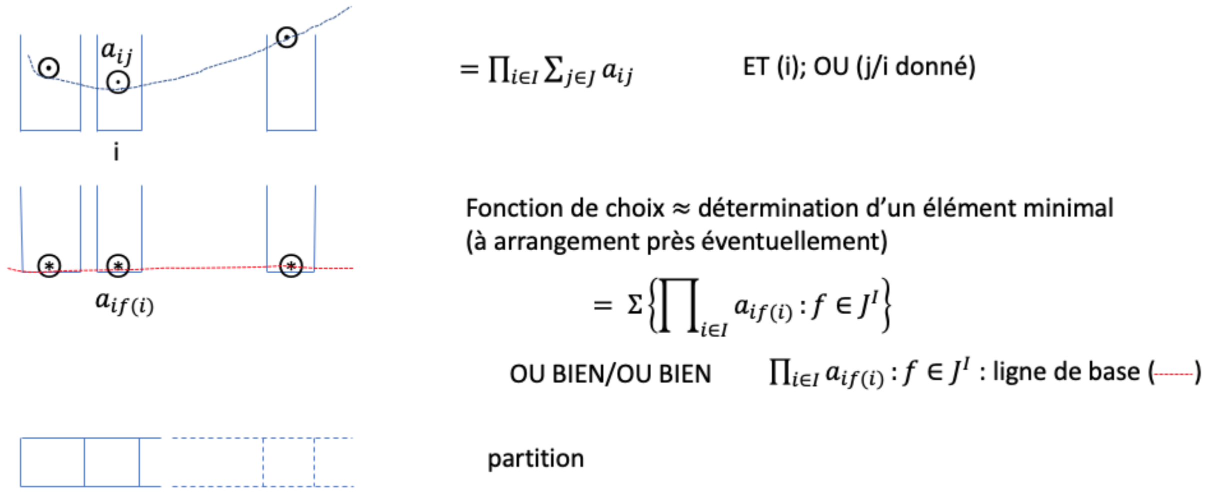



**Figure 7.** *Représentation schématique du rôle de la fonction de choix dans la structure d'ordre et réciproquement*

Clairement, la $(\kappa,\mu)$-distributivité implique la $(\kappa,\lambda)$-distributivité quand $\lambda < \mu$. Considérons une algèbre d'ensembles A telle que pour tout M ⊆ A de taille $< \mu$, ∪M et ∩M sont dans M ; A est appelée une $\mu$-algèbre. On vérifie que pour des cardinaux $\kappa$, $\lambda < \mu$, si A est une $\mu$-algèbre, alors A est $(\kappa,\lambda)$-distributive *Une algèbre de Boole A est complètement distributive si et seulement si elle est atomique*[22]. *Une algèbre de Boole complète est complètement distributive si et seulement si elle est isomorphe à une algèbre d'ensemble puissance*. La distributivité se reformule en termes de *raffinements de partitions*.

Une partition de a>0 est un ensemble maximal P d'éléments mutuellement incompatibles x caractérisé par 0< x ≤ a. Une partition $P_1$ est un raffinement d'une partition $P_2$ si tout élément x ∈ $P_1$ est tel que x ≤ y pour un y ∈ $P_2$. Soient $\kappa$ infini et $\mu = (2^{\kappa})^{+}$. Une algèbre de Boole $\mu$-complète A est $(\kappa, 2)$-distributive si et seulement si pour tout sous-ensemble X de A de taille inférieure à m $(\leq \mu)$, la sous-algèbre $\mu$-complète engendrée par X est atomique.

*Le point remarquable, d'un grand intérêt pour analyser la fonction* $\zeta$ *, est que la* $(\kappa, \lambda)$*-distributivité admet une expression en termes de modèles booléens reposant alors sur le concept de forcing ([COP02] et voir note en bas de page N°7).* Cela permet d'en déduire l'implication majeure suivante :*Si A est* $(\kappa,2)$*-distributive, alors elle est* $(\kappa,2^{\kappa})$*-distributive* .

2.5.B *Position de l'axiome de Martin* : Dans la note précédente de la présente revue intitulée « La fonction $\zeta$ de Riemann et l'ombilic des mathématiques pour traiter de la complexité » nous avons affirmé que la construction de cette fonction appelle naturellement l'axiome de Martin ; cependant l'analyse mathématique qui précède sa construction suggère que sa construction n'exige pas le recours à cet axiome. La multiplication des entiers naturels peut être appréhendée comme itération de l'addition, mais cette caractéristique peut encore être comprise au travers de la loi de distributivité :

$$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = \mathrm{m} \times (1 + 1 + \cdots + 1) = \mathrm{m} \times 1 + \mathrm{m} \times 1 + \cdots + \mathrm{m} \times 1 = \mathrm{m} + m + \cdots + m,$$

où les différentes sommes itérées comprennent n termes. Relisons de quelle manière la fonction $\zeta$ est construite en prenant soin de conserver la double écriture ; il vient :

$$\sum\nolimits_{n\in\omega} n^{-s} = \sum\nolimits_{n\in\omega} \prod\nolimits_{i\in\omega} p_i^{-s\cdot r_{n,i}} = \prod\nolimits_{i\in\omega} \sum\nolimits_{n\in\omega} p_i^{-s\cdot n}$$

Rappelons que l'opérateur $\sum(-)$ se calcule également comme opérateur « sup ». La seconde égalité est à rapprocher de la formulation générale de la distributivité infinie, à savoir :

$$\prod\nolimits_{\alpha<\omega} \sum\nolimits_{\beta<c} a(\alpha,\beta) = \sum\nolimits_{f:\omega\to c} \prod\nolimits_{\alpha<\omega} a(\alpha, f(\alpha))$$

Il apparaît ainsi que la construction de la fonction $\zeta$ correspond à la formulation de la distributivité infinie de type $(\omega,\boldsymbol{c})$ . La loi de base de l'arithmétique peut être lue comme loi de distributivité de type $(\omega,2)$. La distributivité de type $(\omega,\omega)$ implique la distributivité $(\omega,2)$ qui elle-même implique celle de type $(\omega,\boldsymbol{c})$. *Ce qui précède signifie explicitement que la fonction* $\zeta$ *est constructible en toutes circonstances, sans faire appel à l'axiome de Martin qui affirme en l'occurrence que tous les cardinaux inférieurs à* $2^{\aleph_0}$ *se comportent comme* $\aleph_0$ ; toutefois cet axiome est implicitement suggéré par la constructibilité même de $\zeta$ en sorte qu'il paraîtrait judicieux d'examiner comment cet axiome peut être exprimé plus directement par le truchement de $\zeta$ en particulier le fait que la *fonction* $\zeta$

[22] Un *atome* d'une algèbre de Boole *B* est un élément n'ayant d'autre minorant strict que 0. Les singletons sont des atomes de l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble. Celle-ci a de plus la propriété que tout élément non nul est minoré par au moins un atome : une telle algèbre de Boole est dite *atomique*. Il existe également des algèbres de Boole sans atomes, comme l'algèbre de Lindenbaum pour le calcul propositionnel sur une infinité de variables.

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

*exprime la distributivité infinie de type (ω,c) de l'arithmétique*. Notons que cette lecture de la fonction $\zeta$ est permise puisque nous avons pu ramener sa définition à une approche ordinale.

Cette approche est intéressante à plusieurs titres. D'une part, La fonction $\zeta$ est justifiée par une nécessité structurelle liée au passage de la distributivité initiale liant addition et multiplication dans le modèle de base de l'arithmétique par passage *à la distributivité infinie* ; cela explique le rôle central tenu par cette fonction dans l'étude précisée des propriétés de la multiplication arithmétique y compris aux limites. D'autre part, le passage à la distributivité infinie est *garanti grâce au recours à un modèle booléen*, même si ce résultat peut être obtenu par d'autres voies, ce qui vient en appui à l'approche intuitive du prédicat d'égalité que nous avons développée dans l'introduction. Enfin, *la distributivité booléenne se formule de manière équivalente en termes de partitions*, l'opération de partition trouve son pendant exact au plan topologique, exprimé sous la forme de raffinement de recouvrements d'ouverts qui intervient dans la définition de la notion élargie de la compacité à savoir la paracompacité. Elle consiste à remplacer l'exigence d'extraire un recouvrement fini par celle plus faible d'obtenir un *recouvrement localement fini* comme nous l'avons déjà rencontré dans les développements techniques touchant célèbre théorème de Marshall Stone relatif à la classe des espaces $T_2$ (la *paracompacité est une propriété équivalente à la métrisabilité*).

2.5.C *La question du forcing. Extension des univers de raisonnement.* La fonction $\zeta$ est lue à la lumière du *lemme de Rasiowa-Sikorski* (R-S)[23] qui constitue une reformulation de la loi fondamentale de l'arithmétique à savoir la décomposition unique de tout nombre entier en produit unique de nombres premiers ensemble vu comme filtre générique. *Les opérations booléennes plus, moins et composition (.) expriment les opérations finitaires de nature ensembliste d'union, de complémentation et d'intersection*. Le passage à l'infini s'effectue en particulier par l'introduction de *deux nouvelles opérations notées* $\Sigma$ *(somme) et* $\Pi$ *(produit)* qui ne sont pas partout définies. Elles permettent de rendre compte de *l'union et de l'intersection de familles quelconques d'ensembles*.

Soit A une algèbre de Boole, pour M $\subseteq$ A, $\sum$M et $\Pi$M sont respectivement la plus petite borne supérieure et la plus grande borne inférieure de M dans l'ordre partiel (A,$\leq$) quand ces grandeurs existent. Si M= $\{m_i : i \in I\}$ on peut également écrire $\sum_{i\in I} m_i$ et $\prod_{i\in I} m_i$. A est dite complète si $\sum$M et $\Pi$M existent pour tout M $\subseteq$ A. En fonction de la structure booléenne en cause *il n'y a plus nécessairement identification entre* $\sum$(M) *et* $\cup$(M). Il faut également distinguer ces notions lorsqu'elles sont calculées sur l'algèbre A toute entière ou sur une sous-algèbre. *Une sous-algèbre est dite régulière si cette distinction disparaît*.

Il faut alors examiner les règles habituelles de l'arithmétique

(i) Règle d'associativité : $\sum_{i\in I}(\Sigma M_i) = \Sigma(\cup_{i\in I} M_i)$ quand les grandeurs à gauche et à droite existent.

(ii) Règle de distributivité n° 1: pour a $\in$ A, a $\bullet$ $\sum$ M= $\sum\{a \bullet m : m \in M\}$

(iii) Règle de distributivité n° 2 : $\sum$M $\bullet$ $\sum$N =$\sum\{m \bullet n : m \in M ; n \in N\}$ et plus généralement pour des produits finis.

On obtient des résultats similaires par dualité. Dans une algèbre de Boole A et pour une quantité finie d'éléments $a_1,\ldots,a_n$ on a : $a_1 + \ldots + a_n = sup\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = inf\{a_1, \ldots, a_n\}$. Dans le cas où

[23] soit $(P, \leq)$ un poset and $p \in P$. If $D$ est une famille dénombrable de sous-ensembles dense de $P$ alors il existe un filtre D-générique G dans $P$ tel que $p \in G$. Or l'existence de tels filtres garantit la capacité de forcing ensembliste. On peut affirmer qu'étant donné un ensemble de conditions $P$, on peut supposer qu'il existe un filtre générique $G$, tel que $V[G]$ un univers au-delà de V, dans ZFC. Les affirmations vraies dans $V[G]$ se ramènent à des affirmation vraies dans $V$ par rapport à la relation de forcing.

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

on peut étendre cette approche aux sous-ensembles infinis S quelconques, l'algèbre A est dite complète (et $\sigma$-complète dans le cas des seuls sous-ensembles dénombrables). L'algèbre $\mathcal{P}(X)$ est complète, en revanche FC(X) n'est ni complète, ni $\sigma$-complète. Les lois de De Morgan[24] s'énoncent alors sous l'hypothèse de complétude : $-sup\ R= inf(-R)$ et $-\inf R=\sup(-R)$. Par ailleurs : $a+sup\ R=sup\ (a+R)$ et $a\bullet inf\ R = inf\ a\bullet R$ . On peut noter *sup R* au moyen de la formulation $\sum R$ et *inf R* via $\Pi\ R$ pour exprimer différemment les formules ci-dessus.

Soit $f$ : A → B un homomorphisme et M ⊆ A tel que ∑M, ou Π M, existe. $f$ préserve ∑M si ∑$f$(M) existe et si $f$(∑M) = ∑ $f$(M) ; définition parallèle pour le produit Π. Soit p un ultrafiltre de A et M ⊆ A tel que ∑M, ou ΠM, existe. p préserve ∑M si ∑M ∈ p implique qu'il existe un m ∈ p ; p préserve ΠM si M ⊆ p implique ΠM ∈ p. l'ultrafiltre p préserve ∑M ou ΠM si et seulement si l'homomorphisme caractéristique $\chi_p$ : A → 2 préserve ∑M ou ΠM. La loi de de Morgan s'énonçant : ∑M=Π{-m :m∈M} il en résulte que p préserve ∑M si et seulement si p préserve=Π{-m :m∈M} , et préserve ΠM si et seulement si p préserve ∑{-m :m∈M} . On soulignera le caractère symétrique de la propriété.

*Lemme de Rasiowa-Sikorski* : si dans l'algèbre de Boole A, S et P sont des familles au plus dénombrables de sous-ensembles tels que ∑M existe pour tout M dans S et ΠN existe pour tout N dans P. il existe alors un ultrafiltre de A préservant ∑M pour tout M de S et ΠN pour tout N de P.

*Preuve* : grâce au caractère symétrique de la propriété, il suffit d'étudier le seul cas de la préservation de Σ. Le cas S vide est trivial. Soit S $=\{M_n : n\in\omega\}$, on construit par induction une suite décroissante 1 $= a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ dans $A^+ =$ A\ $\{\mathbf{0}\}$ tels que pour tout n : $a_{n+1}\cdot\Sigma M_n = \mathbf{0}$ ou $a_{n+1}\leq$ m pour un m ∈ M (*). Partant de $a_0 = 1$ et supposons $a_n$ déjà construit, il s'agit de choisir $a_{n+1}$. Si $a_n\cdot\Sigma M_n = \mathbf{0}$, on pose $a_{n+1} = a_n$ ; sinon on a $\mathbf{0} < a_n\cdot\Sigma M_n = \Sigma\{a_n\cdot m : m\in M_n\}$, cela implique qu'il existe $m\in M_n$ tel que $\mathbf{0} < a_n$ ·m. On pose alors $a_{n+1} = a_n\cdot m$ de telle sorte que la condition inductive est encore respectée. L'ensemble E= $\{a_n : n\in\omega\}$ est une chaîne décroissante dans $A^+$ et possède donc la propriété d'intersection finie. Il s'en suit qu'il existe un ultrafiltre contenant E. Considérons un $M_n$ avec $\Sigma M_n\in$ p, comme $a_{n+1}\in$ p, il vient $a_{n+1}\cdot\Sigma M_n > 0$. A cause de l'alternative inductive (*), on en déduit que $a_{n+1}\leq$ m pour un m ∈ $M_n$, qui implique m ∈ p. Ainsi p préserve ΣM □

*L'axiome de Martin s'énonce* : *Soit A algèbre de Boole vérifiant la condition de chaîne dénombrable, S une famille de sous-ensembles de A avec* $|S|<2^{\omega}$ *tel que ∑M existe pour tout M dans S, il existe alors un ultrafiltre de A préservant ∑M pour tout M dans S.*

Revenons à partir de là à la fonction zêta : pour une valeur donnée de la variable « s », la donnée de la grandeur « $n^{-s}$ » peut être appréhendée comme couple $\langle n, s\rangle$, plus précisément *comme la donnée de l'entier « n » à une échelle fixée « s »*. Les entiers naturels constituent le segment initial de l'ensemble des ordinaux, que l'on peut à ce stade limiter aux ordinaux dénombrables. Un entier, plus généralement un ordinal, détermine de manière biunivoque le segment terminal des ordinaux strictement supérieurs à cet élément. *La collection des segments terminaux relève alors d'une algèbre de Boole A*. Soient S l'ensemble des entiers naturels muni de sa structure additive et P l'ensemble des entiers premiers, *la construction de la grandeur* ζ(s) *s'interprète comme la construction d'un ultrafiltre qui préserve à la fois la structure additive de S et la structure multiplicative de P de taille inférieure à* $\mathbf{c}$ *(<* $\mathbf{c}$*)*. Notons que la préservation additive et *la préservation multiplicative sont duales l'une par rapport à l'autre grâce à la loi de Morgan infinie*. Autrement dit la construction de ζ qui consiste fondamentalement à

[24] Les lois de De Morgan sont des identités entre propositions logiques. Leurs énoncés se généralisent aux propositions par récurrence, en utilisant l'associativité des lois et la double distributivité.

introduire des copies en quantité *inférieure à* $\boldsymbol{c}$ ($<\boldsymbol{c}$) de l'ensemble des entiers premiers, en imposant implicitement la condition ccd, appelle *implicitement* l'énoncé de l'axiome de Martin. *Il existe donc bien un lien intrinsèque ou formel entre la définition de la fonction de Riemann et l'énoncé de l'axiome de Martin même si cette fonction n'en fournit à ce stade qu'une formulation faible, qui appelle alors évidemment sa généralisation. Celle-ci nous conduit à la une nouvelle approche de la conjecture de Riemann*

### 2.6. *Séparation à gauche et à droite. L'axiome de Martin et la conjecture de Riemann*

Il est usuel en topologie, soit d'exprimer les propriétés *d'un espace en termes de points limites*, soit d'en considérer les propriétés *sous l'angle des possibilités de recouvrement*. L'exemple emblématique est fourni par la propriété essentielle de *compacité qui se formule en termes de recouvrements ouverts dont on peut toujours extraire des recouvrements finis*. Toutefois on peut également et alternativement examiner la compacité en termes de propriétés concernant les limites puisque dans ce cas *tout sous-ensemble infini d'un tel espace admet un point limite*. Dans le cas des espaces métriques, *la séparabilité* se manifeste de plusieurs manières équivalentes entre elles ; par exemple: (i) l'existence d'une base dénombrable d'ouverts, (ii) l'existence d'un ensemble dénombrable partout dense, (iii) la dénombrabilité de toute famille d'ensembles ouverts disjoints. On observera cependant que dans des espaces plus généraux, tels *les produits cartésiens de type transfini, ces équivalences ne sont plus valides*. Précisément, l'espace topologique associé à $\zeta$ se présente comme un produit topologique transfini, susceptible d'invalider *l'équivalence entre la séparation et la propriété de Lindelöf*. La lecture de $\zeta$ selon l'échelle ordinale conduit *à abandonner le caractère métrisable de l'espace*, alors qu'en revanche *l'espace global représenté par la surface de Riemann associée à cette fonction est pour sa part métrisable*. Il paraît dès lors judicieux de restituer l'équivalence entre séparabilité et propriété de Lindelöf, c'est-à-dire la dénombrabilité de sous recouvrements.

Le continu fourni par la droite réelle, plus généralement un domaine continu simple du plan $\mathbb{R}^2$, est caractérisé par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

- La propriété de séparation (PS) selon laquelle tout sous-ensemble de X contient un sous-ensemble dénombrable de même clôture
- La propriété de recouvrement, ou propriété de Lindelöf (PL) selon laquelle toute famille d'ouverts de X contient une sous-famille dénombrable de même union.

Ces deux propriétés se superposent. En pratique la mise en œuvre du passage du discret au continu peut reposer sur les deux voies d'approches complémentaires fournis par ces propriétés. Or comme cela a été montré en détail dans les paragraphes précédents, tout l'enjeu du passage du discret au continu est formalisé par le seuil $\omega_1$.

Considérons donc, espace topologique T d'Hausdorff de cardinal $\aleph_1$. On cherche à déterminer si cet espace possède un sous-espace discret indénombrable. Une fois encore, la définition de $\zeta$ suggère de retrouver les propriétés de séparation et de recouvrement d'une nouvelle manière. L'écriture additive de la fonction introduit des couples $\langle n, s\rangle$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $s \in K \subseteq \mathbb{C}$ ; pour un entier $n$ fixé, ces éléments doivent être interprétés comme des points adhérents à cet entier[25]. Il s'introduit ainsi subrepticement une topologie additionnelle venant se surajouter à la topologie de base sur $\mathbb{N}$, correspondant pour sa part à l'énumération de l'ordre linéaire de type $\omega_0$ . Fort de ce constat, il paraît judicieux d'introduire *les deux concepts duaux de séparation à gauche et de séparation à droite* reposant sur la relation d'ordre.

[25] Note de l'éditeur : au plan physique ces points conduisent à l'introduction subreptice de corrélations à longue distances et d'intrications qui vont affecter à la dynamique (discrétisée), loin des approches différentielles standards, des caractéristiques globales. Ces caractéristiques sont associées à la topologie additionnelle (ordre et sous-ensembles spécifiques affectés à zêta) par rapport à la topologie de base sur $\mathbb{N}$.

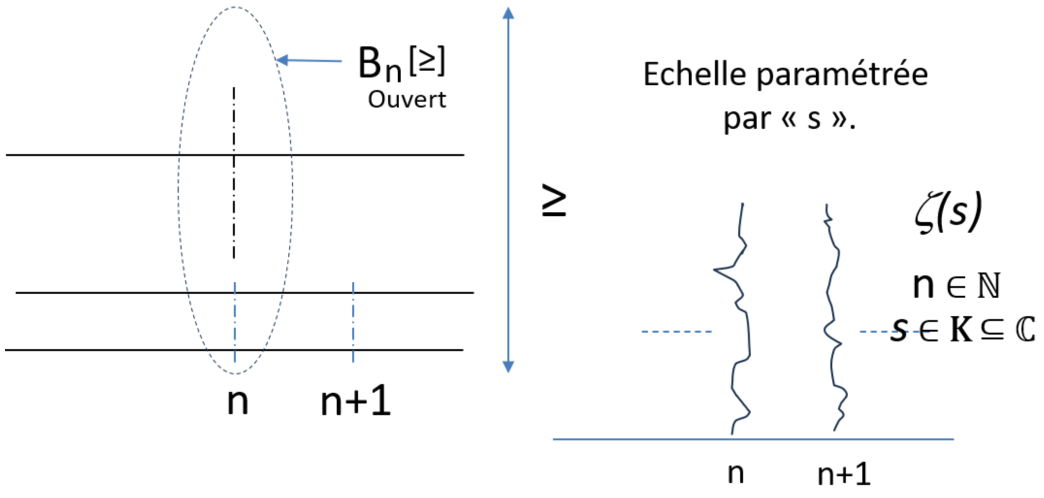



**Figure 8.** *Représentation schématique de la structure d'ordre duale qui caractérise la fonction zêta l'une fermée l'autre ouverte. On pointe ainsi l'association de zêta avec les structures de type « clopen ».*

*Preuve* : Soit X un espace et $\leq$ une relation réflexive et transitive sur X ; on peut alors définir une nouvelle topologie en considérant comme nouveaux ouverts les ensembles $\{y \in X : y \leq x\}$ et le nouvel espace ainsi obtenu est noté X[≤]. Si U est un voisinage ouvert de x dans X, U$[\leq x] = \{y \in U : y \leq x\}$ est voisinage ouvert de X[≤]. Si X est de dimension 0 et régulier et si $\leq$ est fermé dans $X^2$, alors X[≤] est également de dimension 0 et régulier. Si D est un sous-espace discret de X[≤], alors D est l'union de w(X) anti-chaînes de (X, ≤) car *si U est un voisinage commun à x et y et si x* $\notin$ *U*$[\leq y]$, $y \notin$ *U*$[\leq x]$, *il est clair que x et y sont incomparables*. Y est dit séparé à droite si et seulement s'il existe un bon ordre $<_b$ sur Y tel que pour tout y ∈ Y il existe un voisinage $U_y$ avec x $\notin U_y$ pour tous les x $>_b$ $y$. En inversant la dernière inégalité on obtient le concept dual de séparation à gauche □

*Ainsi si Y est séparé à gauche dans X[≤], alors Y est union de ω(X) sous-EPO inversement bien-fondés de (X, ≤)*

*Preuve* : si (Y, $<_b$) est un sous-espace séparé à gauche dans X[≤] par une suite de séparation $\{U_x : x \in Y\}$. On peut prendre pour $U_x$ des $U_x = V_x[\leq y]$ où $V_x$ est un ouvert de X. Pour V un ouvert de X, en prenant $Y_V = \{x \in Y : V_x = V\}$. L'inégalité x $<_b$ y dans $Y_V$ implique x $\nleq$ y ; cela signifie que $Y_V$ est inversement bien-fondé □

*Si Y est un EPO bien-fondé de (X, ≤), alors Y est séparé à droite dans X[≤], et séparé à gauche dans X[≥],*

*Preuve* : comme Y est bien-fondé par rapport à $\leq$ il existe donc un bon ordre $<_b$de Y tel que x ≤ y implique x $\leq_b$ y. l'ensemble $\{\mathrm{X}[\leq x] : x \in Y\}$ est une suite « séparante » à droite pour $<_b$ dans Y. l'autre énoncé dual se vérifie de manière similaire □

Dans la première situation, d'énumération T $= \{x_i : i \in \omega_1\}$, tout segment initial $\{x_i : i \in \alpha\}$ est ouvert, donc chaque $x_\alpha$ est séparé par un ouvert de tous les autres points $x_\beta$, $\beta > \alpha$. Pour obtenir un ensemble discret indénombrable il semble donc suffisant de séparer les $x_\alpha$ d'un ensemble indénombrable de points par ailleurs en quantité dénombrable dans l'ensemble ainsi énuméré avant d'atteindre $\alpha$.

Si un espace Hausdorff régulier et indénombrable ne possède pas de sous-espace discret indénombrable en dépit du fait que tous les segments initiaux dans une $\omega_1$-énumération sont ouverts, cet espace est dit S-espace séparé à droite de type $\omega_1$. Une autre manière de procéder par une $\omega_1$-

énumération avec tous les segments finaux $\{x_i : i \geq \alpha\}$ sont ouverts ; dans ce cas tout point possède un voisinage disjoint de tous les points situés en-dessous de lui. Si un espace Hausdorff régulier et indénombrable ne possède pas de sous-espace discret indénombrable en dépit du fait que tous les segments finaux dans une $\omega_1$-énumération sont ouverts, cet espace est dit L-espace séparé à gauche de type $\omega_1$. *Par construction un S-espace est séparable, un L-espace est de type Lindelöf.*

Les propriétés topologiques d'un espace, comme fonction sur les sous espace, s'expriment principalement comme fonctions sur des cardinaux. Si $\alpha$ est un cardinal, *un espace est dit $\alpha$-séparable si $\alpha$ est le cardinal minimal d'un sous-ensemble dense ; un espace est dit $\alpha$-Lindelöf si $\alpha$ est le cardinal minimal tel que tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement de ce cardinal.* En généralisant les notions d'ensembles séparés à droite et à gauche, *on aboutit au nombre de Lindelöf héréditaire* d'un espace $X$, encore appelée *hauteur*, valant $sup\{|A| : A \subset X \; et \; A \; séparé \; à \; droite\}$ ; de même le nombre de séparabilité héréditaire de $X$, appelée également *largeur*, vaut $sup\{|A| : A \subset X \; et \; A \; séparé \; à \; gauche\}$. On appelle l'éparpillement de $X$ la quantité $sup\{|A| : A \subset X \; et \; A \; discret\}$. *Il s'en suit qu'un espace $S$ se caractérise comme étant un espace $T_3$, de hauteur $\omega_1$ et de largeur, ou encore d'éparpillement, dénombrable.* Un espace $L$ se caractérise comme étant un espace $T_3$, de largeur $\omega_1$ et de hauteur, ou encore d'éparpillement, dénombrable. *L'espace engendré par $\zeta$ se présente naturellement comme un espace $S$, donc de hauteur $\omega_1$ et de largeur dénombrable.*

Il s'agit maintenant de savoir s'il peut également être considéré comme un espace $L$, autrement dit comme *de largeur $\omega_1$ et de hauteur dénombrable*.

Tout l'enjeu consiste à savoir sous quelles conditions il est possible d'échanger les propriétés pour un espace d'être un S-espace ou un L-espace. Pour manipuler les propriétés d'énumération ensemblistes, il est usuel d'exploiter la propriété d'autosimilarité de $\mathbb{N}$, à savoir $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ce qui conduit à focaliser le raisonnement sur les propriétés qui sont préservées par *passage au produit cartésien*, auquel cas on attribue le qualificatif de *fort* à de telles propriétés. L'espace $X$ est un $S$-espace fort si et seulement si pour tout $n$ $X^n$est HS (héréditairement séparable), mais $X$ n'est pas HL (héréditairement Lindelöf) ; de même $X$ est un $L$-espace fort si et seulement si pour tout $n$ $X^n$ est HL, mais n'est pas HS. Par construction de la fonction $\zeta$ , l'espace topologique associé est clairement HS fort.

*C'est à ce stade qu'il paraît naturel de faire appel à l'axiome de Martin qui est précisément un procédé visant à étendre la propriété de Baire en établissant l'équivalence entre séparabilité et recouvrement ouvert dans le cas canonique de la droite réelle.* On utilisera le résultat d'équivalence suivant établit (annexe 3) par K. Kunen [KUK80] :

Théorème : *sous l'axiome de Martin (AM) +, ¬HC,* $\forall x (\forall n \in \omega (X^n \text{ est HS}) \Leftrightarrow (\forall n \in \omega (X^n \text{ est HL}))$

Il en résulte le fait important suivant : *L'espace topologique associé à la fonction $\zeta$ est un espace HL fort.*

Supposons que la variable "$s$" balaye le domaine critique du plan complexe par translation d'un sous-domaine compact K pour obtenir son image vue comme espace HS. On peut extraire une sous-suite $\{(s + i\tau_m)\}_{s\in K, m\in\mathbb{N}}$, et l'on obtient de la sorte les images $\{\zeta(s + i\tau_m)\}_{s\in K, m\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que chaque image appartient à l'un des ouverts correspondant à la structure d'espace HL fort (annexe 3)[26] :

[26] On reconnaitra dans cette extension une approche du théorème de Voronin [RIP17].

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

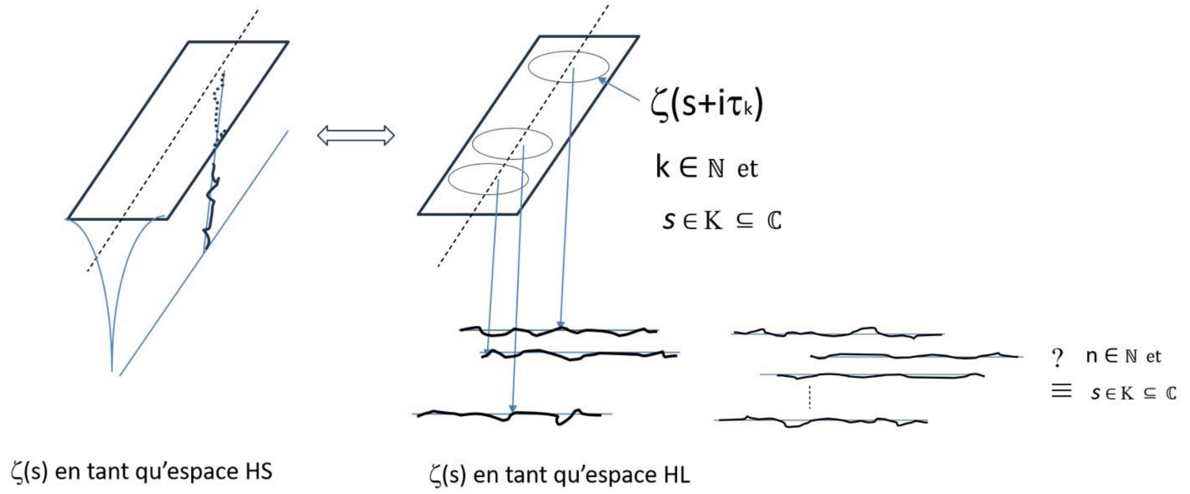



**Figure 9.** *Représentation schématique de la dualité de la fonction zêta en tant qu'espace héréditaire Lindelöf (HL) et en tant qu'espace héréditaire séparable (HS)*

Par conséquent, les différentes images convergent vers la même valeur, selon le lemme attaché à la caractérisation la continuité par préservation de la compacité et de la connexité. Il s'en suit alors que le lemme de Bagchi soit, nonobstant la présence de zéros dans le champ de définition de la fonction, l'extension du théorème de Voronin à la fonction zêta , par ailleurs autosimilaire, elle-même est vérifié, à savoir :

Lemme de Bagchi : *l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si, pour tout compact K de la bande critique ½ < $\sigma$ < 1 avec complément connexe et pour tout $\varepsilon > 0$ :*

$$\liminf_{T\to\infty} 1/T \; mes\{\tau\in[0,T];\ Max\ |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s)| < \varepsilon\} > 0$$

*Par conséquent, selon l'analyse qui précède, la conjecture de Riemann est satisfaite sous l'hypothèse de l'axiome de Martin.*

Nous pouvons maintenant montrer que *la validité de la conjecture de Riemann entraîne la validité de l'axiome de Martin*. Pour cela, nous faisons appel à une formulation équivalente de cet axiome, établie par Todorcevic et Velickovic, [TVB87] en termes de partitions. Il est utile d'envisager les deux implications : (S) : (PS) ⟹ (PL) et (L) : (PL) ⟹ (PS).

Considérons un espace régulier vérifiant (PS) + [¬ (PL)]. Cela signifie qu'il existe Y ⊆ X muni d'un bon ordre (<) et pour tout x de Y, il existe un voisinage $U_x$ de x dans X tel que y n'est pas dans $\overline{U_x}$ pour tout y > x dans Y. Pour montrer que l'implication (S) est valide pour X, il faut par conséquent montrer que X ne satisfait pas la prémisse (PS). Il suffit donc d'exhiber un ensemble indénombrable tel que D ⊆ Y alors que x n'est pas dans $U_y$ pour tous les x < y dans D. En combinant les deux conditions on aboutit à l'installation d'une partition $[Y]^2 = K_0 \cup K_1$ avec $\{x, y\}_< \in K_0$ si et seulement si x $\notin U_y$. Examinons le cas emblématique où X = Y = $w_1$ ; il s'agit d'un espace de dimension 0 si bien que les voisinages canoniques sont de type ouverts-fermés. Pour x ∈ X deux voisinages ouverts lui sont ainsi attachés : $U_x = U_x^1$ et $U_x^0$ est son complémentaire. On peut ainsi considérer l'espace $\hat{X}$ muni de la topologie la plus faible engendrée par les $\{U_x^0, U_x^1 : x \in X\}$. Si X ne vérifie pas (S), il en est de même de $\hat{X}$.

La formulation en termes de partition s'énonce :

- *(S) pour toute partition $[\omega_1]^2 = K_0 \cup K_1$ il existe une suite croissante $\{a_\xi : \xi < \omega_1\}$ de sous-ensembles à n éléments de $\omega_1$ et un k < n tels que pour $\xi < \zeta$, soit il existe i < k tel que $\{a_{\xi k}, a_{\zeta i}\} \in K_1$, soit pour i ≥ k $\{a_{\xi k}, a_{\zeta i}\} \in K_1$ si et seulement si $\{a_{\xi k}, a_{\zeta i}\} \in K_0$*

- *(L) pour toute partition* $[\omega_1]^2 = K_0 \cup K_1$ *il existe une suite croissante* $\{a_\xi : \xi < \omega_1\}$ *de sous-ensembles à n éléments de* $\omega_1$ *et un* $k < n$ *tels que pour* $\xi < \eta$*, soit il existe* $i > k$ *tel que* $\{a_{\xi i}, a_{\eta k}\} \in K_1$*, soit pour un* $i \le k$ $\{a_{\xi i}, a_{\eta k}\} \in K_1$*, si et seulement si* $\{a_{\xi i}, a_{\xi k}\} \in K_0$

Considérons maintenant un ensemble indénombrable S avec une partition $[S]^{<\omega} = K_0 \cup K_1$. Cette partition est dite de type *ccd* si :

-$\{x\} \in K_0$ pour tout x $\in S$
-Un sous-ensemble d'un élément de $K_0$ est encore dans $K_0$
-Tout sous-ensemble indénombrable de $K_0$ possède deux éléments dont l'union est dans $K_0$

Deux énoncés sont alors introduits :

($\mathcal{L}$) soit $S$ de taille inférieure à $\boldsymbol{c}$ ($< \boldsymbol{c}$) et soit $[S]^{<\omega} = K_0 \cup K_1$ une partition ccd ; alors $S$ peut être recouvert par une quantité dénombrable de sous-ensembles $S_n$ tels que pour tout n, $[S_n]^{<\omega} \subseteq K_0$ .

($\mathcal{H}$) pour tout ensemble indénombrable $S$ et toute partition $[S]^{<\omega} = K_0 \cup K_1$ ; il existe alors un sous-ensemble indénombrable $H$ de $S$ tel que $[H]^{<\omega} \subseteq K_0$.

*Théorème de Todorcevic et Velikovic* [TV87]: *l'énoncé* ($\mathcal{L}$) *est équivalent à l'axiome de Martin ; l'énoncé* ($\mathcal{H}$) *est équivalent à l'axiome de Martin pour* $\aleph_1$ *ensembles denses.*

L'énoncé du théorème de Bagchi se lit alors comme partition ccd avec $K_0$ formé d'ensembles ℕ à une échelle « s+i$\tau$ » avec : t–δ <|s|< t+δ ; |τ–φ| < η (Figure ci-dessous). Nous aboutissons en conséquence, à l'équivalence entre l'axiome de Martin et l'énoncé de la conjecture de Riemann autrement dit entre des contraintes locales étendue au global (hypothèse de Riemann) et une contrainte, indépendante de ZFC imposée, dans le cadre de la théorie des ensembles, à l'infini (Axiome de Martin).

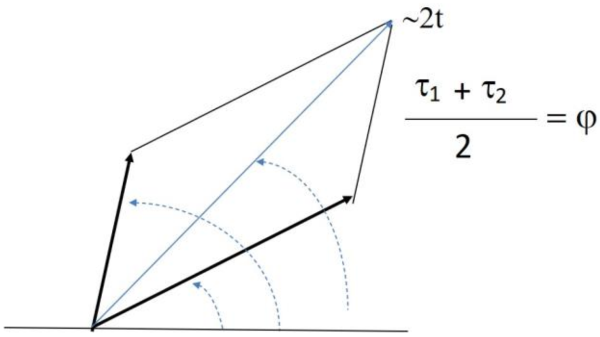



**Figure 10.** *Introduction de la stratification de zêta vue comme expression implicite de la temporalité physique et des effets d'octaves au travers du théorème de Voronin étendu par Bagchi pour les fonctions auto similaires*

## 3. Conclusion

L'étude de la fonction ζ exposée dans la présente publication repose donc sur les facteurs suivants :

- La double écriture, additive et multiplicative, est *la première clé d'entrée* nécessaire à l'analyse de cette fonction.
- Cette clé permet, en effet, de rattacher ζ à un diagramme catégorique fondamental associant le foncteur diagonal et une double adjonction,
- Comme la fonction ζ consiste à préserver à toutes les échelles la propriété fondamentale de l'arithmétique qui est la décomposition de tout nombre entier en produit de nombres premiers, il

© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr 

s'en suit l'intérêt d'une lecture ordinale, comme *seconde clé de lecture*, reposant sur la présence de la condition de chaîne dénombrable (ccd), propriété fondamentale que l'on rencontre aussi bien en théorie des ensembles, en théorie des algèbres de Boole et en topologie, *troisième clé de lecture*,

- La fonction $\zeta$ est ainsi lue comme une simple extension, valable sans hypothèse supplémentaire, de *la distributivité* entre addition et multiplication valable dans le cadre élémentaire arithmétique, mais *désormais étendue à la puissance du continu* ; par ailleurs, cette même fonction se lit aussi comme une formulation faible de l'axiome de Martin.

Ce dernier axiome, bien connu en théorie du forcing, s'avère finalement exprimable au travers de la fonction $\zeta$ en réexprimant l'énoncé de Riemann concernant les zéros de celle-ci.

D'autres aspects de la fonction $\zeta$ qui émergent naturellement en approfondissant les propriétés rappelées ci-dessus, ne sont pas mentionnés dans la présente note. Ainsi, est-il possible d'inscrire $\zeta$ dans le cadre de *l'analyse p-adique en introduisant les espaces de Banach ultra-métriques*. Par ailleurs, la nature ordinale de cette fonction la rattache à l'espace $(\mathcal{P}(\omega),\subseteq)$ et permet donc d'établir des liens avec des notions également bien connus dans ce contexte, par exemple l'équivalents des coupures de Dedekind participant à la construction de la droite réelle classique, usuellement appelés des trous (en particulier les trous d'Hausdorff), ce qui débouche sur une interprétation cohomologique des constructions mises en jeu. Précisément le fait que $\zeta$ fournisse un modèle alternatif du continu, auquel il est naturel d'associer l'axiome de Martin, autrement dit de retenir *l'énoncé de Riemann comme vrai, non plus paramétré par le corps des réels mais par celui des complexes* et caractérisé par la capacité d'une description arithmétique de ses éléments, ouvre d'intéressantes perspectives, non seulement en mathématiques, mais également pour le formalisme mathématique relevant de plusieurs domaines de la physique, parmi lesquels il est judicieux de mentionner la physique quantique, la thermodynamique et la théorie de la gravitation.

## Références


### *Théorie des ordinaux et cardinaux :*

[CHG92] Choquet G. *Cours de Topologie* Ed. Masson 1992

[GJS01] Gerlits J., Juhasz I., Soukup L., Szentmiklossy Z., *Characterizing continuity by preserving compactness and connectedness* 9th Prague Topological Symposium 2001

[KUK80] Kunen K., *Set theory. An introduction to independent proofs*, Studies Logic Found. Math. Vol 102, North-Holland 1980 ( Traitement également du forcing )

[HSW99] Holz M., Steffens K., Weitz E., *Introduction to cardinal arithmetic*, Birkhäuser 1999

### *Connexité et Compactité*

[MME70] McMillan E., *On continuity conditions for functions*, Pacific J. Math. 32 1970

[NAJ85] Nagata J., *Modern general topology*, North-Holland 1985

[OXJ80] Oxtoby J., *Measure and category* , Springer 1980

### *Forcing et axiome de Martin :*

[TOS89] Todorcevic S., *Partition problems in topology*, Contemporary Mathematics 84, American Mathematical Society 1989

[TVB87] Todorcevic, S. Velickovic, B. *Martin's axiom and partitions*, Compositio Math. 63 1987

[COP02] *Cohen, Paul Joseph. "The Discovery of Forcing". Rocky Mountain J. Math.* ***32*** *(4): (2002) 1071–1100*

## *Topologie Continuité Algèbres de Boole et Fonction zêta :*


[ABS78] Abhanoel'skiĭ, A. V. and Wiegandt, R. *Connectednesses* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society , Volume 84 , Issue 1 , July 1978 , pp. 61 – 64 and *Connectednesses and disconnectednesses in topology*. General Topology and Appl. 5 (1975), 9–33. Voir aussi Collins, P. J. Connection properties in topological spaces. Math. Balkanica 1 (1971), 44–51.

[ARL79] Arboleda, L.C. *Les Débuts de l'École Topologique Soviétique: Notes sur les Lettres de Paul S. Alexandroff et Paul S. Urysohn à Maurice Fréchet. Arch.* Hist. Exact Sci. **20**, 73–89 (1979). https://doi.org/10. 1007/BF00776067

[BAG82] Bagchi G., *Join universality theorem for Dirichlet L functions*, Math Z. 181 1982

[KAA92] The Riemann Zeta Function, A.A. Karatsuba, S. Voronin, Walter de Gruyter 1992

[KEJ00] Keating J.P., Snaith N.C., *Random matrix theory*, Commun. Math. Phys., (2000), **214**, 57–89

[KOS00] Koppelberg S., Handbook of Boolean algebras, tome 1 et voir aussi Jech Th., chapitre 14 tome 3

[LMA10] R.P. Le Méhauté, A. El Kaabouchi, L. Nivanen, "*Riemann Conjecture and fractional derivatives*", J. Computers in Maths with Applications, 59 (5), 1610-1613, 2010.

[LAW10] Lawvere W., Menni M., *The Hopf algebra of Möbius intervals* Theory and Applications of Categories 24 (2010)

[MME68] McMillan's Evelyn *On continuity conditions of functions* PhD à l'Université de Virginie (1968).

[RAH14] Helena Rasiowa and Roman Sikorski. *The mathematics of metamathematics*. Monografie matematyczne, vol. 41. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw1963, 519 pp. Published online by Cambridge University Press 12 March 2014.

[RIP19] P. Riot,, A. Le Méhauté, D. Tayurskii, *Fractional Dynamics, Riemann Zeta Function and Self Similarity through Category Theory*, in Advances in Special Functions and Analysis of Differential Equations (Chapter 14) Agarwal Praveen, Agarwal Ravi P., Ruzhansky M. Editors. CRC Press Deleware, 2019

[RIP17] Riot Philippe et Le Méhauté Alain, *Autosimilarité Fonction zêta et conjecture de Riemann* Revue REE Vol 1, Paris 2017

[ROG64] G. C. Rota *Foundations of combinatorial theory* I Z. Wahrscheinlichkeit theo. Verwandte Geb. Z. (1964) page 340 - 368

[TUJ40] John Wilder Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, Princeton University Press, 1940 (ISBN 978-0-691-09568-4, OCLC 227948615)

[VOS75 ] Voronin S. *Theorem of universality of the Riemann Zeta function*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, 39, 475-486; Reprint Maths, URSS Izv, 9, (1975) 443-455 .


## *Théorie des categories*


[FOG56] G. Fodor, Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, *Acta Sci.Math. Szeged*, **17**(1956), 139-142 .

[JOA06] Joyal André, Fonctions analytiques et espèces de structures, Conférence paper Combinatoire énumérative, lecture in mathematics (2006) Vol1234 pp126-159

[LAW97] Lawvere William and Schanuel Stephen *Conceptual mathematics : a first introduction to categories*Cambridge University Press (1997) Cambridge.

[LAW12] Lawvere William, *Categories of space and quantity , the space of mathematics*, Eds Javier Echeveria, Andoni Ibassa, Thomas Marmam, de Gruyter (2012) 14-30

[LET13] Leinster Tom, *Codensity and ultrafilter Monad*, arXiv : 1209.3606v3 [Math.CT] 10 Jul 2013

[LET14] Leinster Tom, *Basic category theory*Cambridge University Press (2014) Cambridge.

[LET22] Leinster Tom, *Entropie and diversity axiomatic approach arXiv* 2012.02113v3[q-bioPE] 22 oct 2022


## *Homotopie, Cohomologie et Entropie*


[BAP15] Baudot P and Bennequin D, *The homological nature of entropy*, 17 (2015) 3253-3318

[FRT04] Frankel T., *The geometry of physics*, 2ème edition, Cambridge University Presss (2004) Cambridge.UK

[VJP10] Vigneaux Juan Pablo, *Coefficients multinomiaux Cohomologie . Entropie Faisceaux, Théorie des Information, Théorie de l' Statistique non-extensive Théorie des types topos* PhD Paris Sorbonne (2019)

## ANNEXE 1

Partons de la situation élémentaire ayant cours dans $\mathbb{N}$ . Considérons ainsi l'ensemble $\mathbb{P}$ des fonctions partielles finies $\omega \to 2$ donc une bi-partition:

$$\mathbb{P} = \{p : p \subset \omega \times 2 \; et \; |p| < \omega \; et \; p \; fonction\},$$

où la relation d'ordre $p \leq q$ est vrai si et seulement si $q \subset p$, soit si et seulement si $p$ prolonge $q$ comme fonction. Par suite, $p$ et $q$ sont compatibles si et seulement si elles coïncident sur $dom(p) \cap dom(q)$, alors $p \cup q$ est un prolongement commun des deux fonctions. $\mathbb{P}$ répond a ccd puisque $|\mathbb{P}| = \omega$. Considérons un filtre G dans $\mathbb{P}$, les éléments de G sont donc deux à deux compatibles, de telle sorte que $f = f_G = \cup G$ est une fonction de domaine $dom(f_G) \subset \omega$. Si $p \in \mathbb{P}$, $p$ peut être appréhendé comme approximation finie de $f$ et $p \in G$ implique $p \subset f_G$, qui peut se lire comme $p$ « force » $p \subset f$, et $p$ apporte l'information relative à $f$ dans $dom(p)$. *Quand $q \leq p$, alors $q$ apporte davantage d'information sur $f$ que n'en apporte $p$.* Le domaine $dom(f_G)$ de la fonction finalement construite par prolongement peut être un petit ensemble, par exemple 0 constitue un filtre associé à $\cup \emptyset = \emptyset$ représentant la fonction vide. La généricité d'un filtre G évite ce type de pathologie, rendant la fonction $f$ générique en tant que représentante d'une fonction typique. Vérifions ce fait en considérant des familles particulières de conditions. Dans le premier cas d'application de la généricité, pour $n \in \omega$, soit $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$ ; tout $p \in \mathbb{P}$ se prolonge à $n$ de telle sorte que chaque $D_n$ est dense dans $\mathbb{P}$. La condition : $\forall n \in \omega \; (G \cap D_n \neq \emptyset)$ signifie que $f_G$ a pour domaine $\omega$ tout entier. Dans le second cas d'application de la généricité, une fonction typique $f : \omega \to 2$ n'est pas constante ; en effet $E = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in dom(p)(p(n) = 1)\}$ est dense donc $G \cap E \neq \emptyset$ implique que $f_G$ prend la valeur 1 quelque part. *La configuration que nous venons d'exposer illustre bien le rôle d'un filtre comme conducteur de la construction d'une fonction à support global par prolongements successifs.* La généricité correspond à la satisfaction de conditions qui s'imposent partout localement par densité.

Une troisième application de généricité pour une autre famille de conditions aboutit à une contradiction.

Preuve : si la condition de type AM est trop forte. En effet, si $h : \omega \to 2$ est une fonction donnée, $E_h = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in dom(p)(p(n) \neq h(n))\}$ est un ensemble dense, si $G \cap E_h \neq \emptyset$ alors $f_G \neq h$. En posant $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in 2^\omega\}$ on a donc : $|\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{c}$ ; si G est un filtre dans $\mathbb{P}$ tel que $\forall D \in \mathcal{D} \; (G \cap D \neq \emptyset)$, cela signifie que $f_G$ est une fonction qui est différente de toute fonction $h : \omega \to 2$. Cette conclusion est absurde, ce qui induit que AM($\boldsymbol{c}$) est faux □

Cette dernière configuration illustre le fait qu'une taille trop importante, concrètement à partir de **c** soit la puissance du continu, rend caduc le respect de la généricité. En revanche l'exigence AM(ω) est vrai, pour le vérifier il suffit de reproduire la construction diagonale de Cantor.

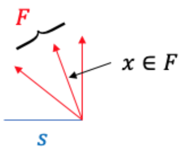
Preuve : Posons $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$, par induction des éléments $p_n$ avec un élément initial quelconque $p_0$ existent tels que $p_{n+1}$ soit un prolongement de $p_n$ avec $p_{n+1} \in D_n$ grâce à la densité des $D_n$ si bien que $p_0 \geq p_1 \geq \cdots$ Finalement le filtre G engendré par $\{p_n : n \in \omega\}$ vérifie $\forall n \in \omega \; (G \cap D_n \neq \emptyset)$ □

Il est pertinent de relever que la condition ccd n'est pas mobilisée pour valider AM(ω). En revanche, il est impossible d'éviter cette exigence sauf à déboucher sur une inconsistance pour imposer le respect de conditions de taille plus grande.

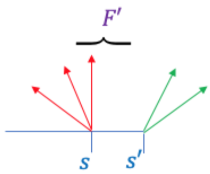
## ANNEXE 2

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$, l'EPO des ensembles presque disjoints $\mathbb{P}_{\mathcal{A}} = \{\langle s, F\rangle : s \subset \omega \; et \; |s| < \omega, F \subset \mathcal{A} \; et \; |F| < \omega \}$ avec la structure d'ordre : $\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle$ si et seulement si $s \subset s'$ et $F \subset F'$ et $\forall x \in F \; (x \cap s' \subset s)$. Cette inégalité signifie que $\langle s', F'\rangle$ *est plus fin que* $\langle s, F\rangle$. Les deux premières conditions d'inclusion sont naturelles à cause des structures d'ordre disponibles à la base ; *la troisième condition s'interprète comme un procédé de mémoire qui informe que parmi les flèches disponibles à l'étape $s'$ celles déjà associées à l'étape $s$ sont simplement gardés en mémoire sans être dupliquées*. De manière imagée, on peut restituer *le processus vu comme un déploiement télescopique* le long d'un cheminement selon les ensembles finis de type $s$ *en agrégeant progressivement les flèches qui leur sont rattachées*.

$\langle s, F\rangle : s \subset \omega \; et \; |s| < \omega, F \subset \mathcal{A} \; et \; |F| < \omega$ :




$\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle$ ssi $s \subset s'$ et $F \subset F'$ et $\forall x \in F \; (x \cap s' \subset s)$:



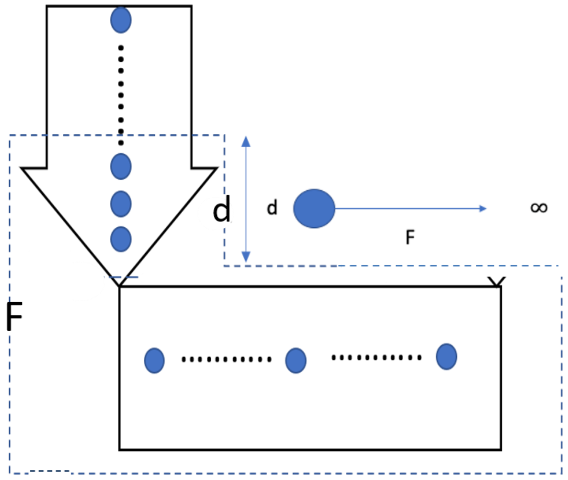

Dans l'EPO $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ $\langle s_1, F_1\rangle$ et $\langle s_2, F_2\rangle$ sont compatibles si et seulement si : $\forall x \in F_1 \; (x \cap s_2 \subset s_1)$ et $\forall x \in F_2 \; (x \cap s_1 \subset s_2)$

Dans ce cas $\langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$ est un prolongement commun. La condition de compatibilité s'exprime également comme suit : $\forall x \in F_1 \; \forall n \in x \setminus s_1 \; (n \notin s_2)$ et $\forall x \in F_2 \; \forall n \in x \setminus s_2 \; (n \notin s_1)$

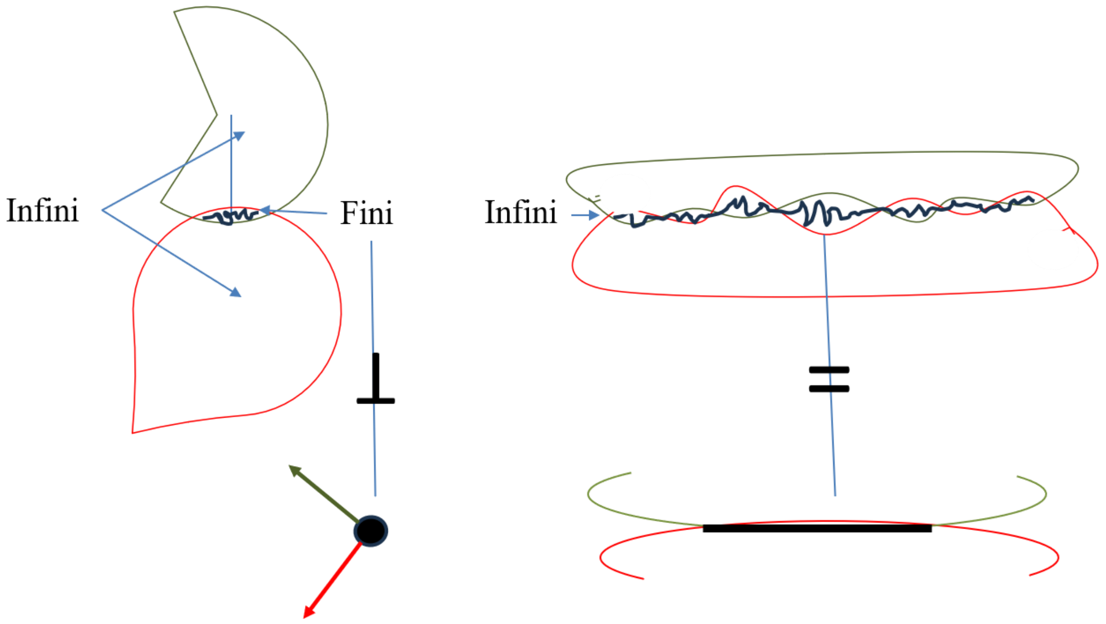
Considérons à présent G un filtre dans $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ , qui par définition a pour vertu d'agréger par prolongement compatible des éléments de cette structure d'ordre en construisant un chemin qui est restitué par la grandeur $d_G = \cup \{s : \exists F \; tel \; que \; \langle s, F\rangle \in G\}$. Si $\langle s, F\rangle \in G$ et $\langle s', F'\rangle \in G$ alors $\langle s, F\rangle$ et $\langle s', F'\rangle$ sont compatibles et donc vérifient $x \cap s' \subset s$ pour tous $x \in F$ ; cela implique que : $\forall x \in F \; (x \cap d_G \subset s)$

Pour un élément $x \in \mathcal{A}$ on pose $D_x = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : x \in F\}$ ; par le résultat précédent il vient : Si G est un filtre dans $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ avec $G \cap D_x \neq \emptyset$, alors $|x \cap d_G| < \omega$. Chaque ensemble $D_x$ est dense dans $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, puisque pour tout $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ on a $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \leq \langle s, F\rangle$ et $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \in D_x$ par définition de ce dernier.

En dernier lieu il est important de relever que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ est ccd ; supposons le contraire en imaginant une anti-chaîne de longueur indénombrable, disons $\langle s_\alpha, F_\alpha\rangle$ avec $\alpha < \omega_1$ incompatibles entre eux, comme les $s_\alpha$ sont en quantité indénombrables au moins deux d'entre eux sont d'intersection non nulle, mais alors ils sont compatibles à cause de la caractérisation précédente de la compatibilité, donc l'hypothèse est invalide. Le mécanisme mis en jeu peut être synthétisé de la manière suivante : un élément $n$ dans un ensemble $x$ d'une famille $F$ d'un couple $\langle s, F\rangle$ situé en dehors de $s$, va demeurer dans les étapes ultérieures en dehors des ensembles $s'$ qui s'accumulent pour former finalement l'ensemble $d_G$. Cette propriété, *qui est une propriété de stabilité* s'interprète intuitivement comme la construction d'une flèche par accumulation progressive d'éléments jusqu'à atteindre une taille d'un ordinal élevé, $\kappa < 2^\omega$, dont rendent compte les illustrations suivantes :



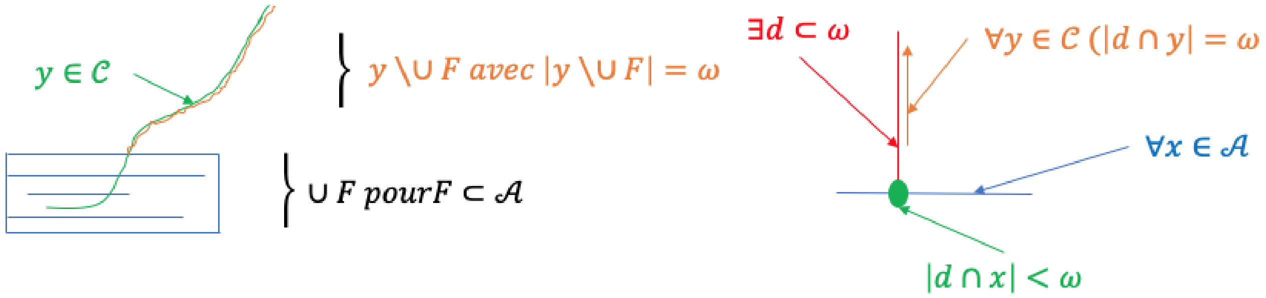

Nous retrouvons une configuration qui apparaît très semblable à celle offerte par la fonction $\zeta$ . Cela n'est pas surprenant car la loi multiplicative de l'arithmétique n'est jamais qu'une représentation sous une nouvelle guise de l'opération ensembliste d'intersection. Un filtre G dans $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ vérifiant $G \cap D_x \neq \emptyset$, alors $|x \cap d_G| < \omega$ pour un $x \in \mathcal{A}$, cela signifie que l'intersection étant finie est négligeable ; autrement dit l'ensemble $d_G$ est situé presque complètement en dehors de la famille $\mathcal{A}$ si l'on peut garantir la généricité de ce filtre. Il est alors pertinent de distinguer deux configurations ensemblistes, en référence au fil conducteur systématique consistant à organiser la distinction entre le fini et l'infini. Un couple d'éléments d'une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$ admet soit (i) une intersection finie, soit (ii) une intersection de taille infinie. *Si on assimile ces éléments à des ouverts-fermés, et donc à des prédicats logiques*, la configuration avec intersection finie correspond à l'existence de *deux prédicats distinguant nettement des ensembles à un ensemble fini près*, alors considéré comme insignifiant. On peut introduire un langage protogéométrique pour rendre compte des deux configurations précédentes en parlant de configuration orthogonale et de configuration parallèle ou tangente :




*Sous l'hypothèse AM(κ), soient* $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\omega)$ *, avec* $|\mathcal{A}| \leq \kappa$ *et* $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ *et l'on suppose que pour tout* $y \in \mathcal{C}$ *et tout* $F \subset \mathcal{A}$ *on a* $|y \setminus \cup F| = \omega$ *, il existe alors* $d \subset \omega$ *tel que* $\forall x \in \mathcal{A}\ (|d \cap x| < \omega)$ *et* $\forall y \in \mathcal{C}\ (|d \cap y| = \omega)$

<u>*Preuve*</u> : pour $y \in \mathcal{C}$ et $n \in \omega$ on introduit $E_n^y = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : \neg(s \cap y \subset n)\}$ ; $E_n^y$ est dense dans $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ : pour $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ $|y \setminus \cup F| = \omega$ par hypothèse, on peut donc prélever un $m \in y \setminus \cup F$ vérifiant $m > n$, alors

$\langle s \cup \{m\}, F\rangle$ est un prolongement de $\langle s, F\rangle$ situé dans $E_n^y$. Sous AM($\kappa$) il existe un filtre $G$ dans $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ qui intersecte tous les ensembles denses de $\{D_x : x \in \mathcal{A}\} \cup \{E_n^y : y \in \mathcal{C} \text{ et } n \in \omega\}$ ; l'élément $d_G$ qui lui est associé se caractérise par le fait que $|x \cap d_G| < \omega$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Si $y \in \mathcal{C}$, alors $\neg(d_G \cap y \subset n)$ pour tout $n \in \omega$ ; autrement dit $d_G \cap y$ est infini.




Corollaire : *Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$ une famille presque disjointe de cardinal k avec $\omega \leq k < 2^{\aleph_0} = c$, et en supposant AM($\kappa$), alors $\mathcal{A}$ n'est pas maximale.*

On applique le théorème précédent avec $\mathcal{C} = \{\omega\}$ , la condition $|y\backslash \cup F| = \omega$ est satisfaite lorsque $F \subset \mathcal{A}$ est fini puisque la famille $\mathcal{A}$ est infinie et presque disjointe. Il en résulte l'existence d'un élément $d$ infini presque disjoint de tous les membres de $\mathcal{A}$ . En appliquant ce même théorème à la configuration $\mathcal{C} = \mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$ où $\mathcal{B}$ e st une famille presque disjointe de taille κ , on obtient :

Soient $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\omega)$ une famille presque disjointe de taille κ où $\omega \leq k < 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Sous l'hypothèse AM(κ), il existe alors un $d \subset \omega$ tel que **:** $\forall x \in \mathcal{A} \; (|d \cap x| < \omega)$ et $\forall y \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{A} (|d \cap y| = \omega)$

## ANNEXE 3

Théorème de K Kunen : *sous l'axiome de Martin (AM) +, ¬HC, $\forall x (\forall n \in \omega (X^n$ est HS$) \Leftrightarrow (\forall n \in \omega$ $(X^n$ est HL$))$*

*Preuve* : On peut toujours se ramener au cas où $X$ est $\omega_1$en tant qu'ensemble et est séparé à droite, ce qui signifie que tout $\alpha = \{\xi : \xi < \alpha\}$ est un ouvert. Pour tout $\alpha \in X$, on peut identifier un ouvert $U_\alpha$ de $\alpha$ tel que $\overline{U_\alpha} \subseteq \alpha + 1 = \{\xi : \xi \leq \alpha\}$. Soit $D \subseteq X$ presque séparé si et seulement si pour tout $\alpha \in D$, $U_\alpha \cap D$ est fini. Un tel $D$ est discret. On considère l'EPO $(\mathbb{P}, <)$ avec $\mathbb{P}$ ensemble des sous-ensembles finis de $\omega_1$. L'interprétation de $p \in \mathbb{P}$ est de forcer "$p \subseteq D$ et $\forall \alpha \in p \; (U_\alpha \cap D = U_\alpha \cap p)$". On définit ensuite $r \leq p$ si $r$ force davantage que $p$ tout en étant compatible avec ce que $p$ force. Précisément : $r \leq p$ si et seulement si $r \supseteq p$ et $\forall \alpha \in p \; (U_\alpha \cap r = U_\alpha \cap p)$. Ainsi, $p$ et $q$ sont compatibles si et seulement si $p \cup q \leq p$ et $p \cup q \leq q$ et :

$$\forall \alpha \in p \; (U_\alpha \cap (q \setminus p) = 0) \text{ et } \forall \alpha \in q \; (U_\alpha \cap (p \setminus q) = 0)$$

Par suite, quand $\beta > \sup(p)$, on a $p \cup \{\beta\} < p$ et donc $E_\alpha = \{r \in \mathbb{P} : \alpha < \sup(r)\}$ est dense. Considérons un filtre $G$ dans $\mathbb{P}$ et $D = \cup G$ est clairement presque séparé. Si $G$ admet une intersection avec tous les $E_\alpha$ pour $\alpha < \omega_1$, alors $D$ est indénombrable. Vérifions que $\mathbb{P}$ vérifie la propriété ccd ; pour cela supposons le contraire si bien qu'il existe une famille d'éléments deux à deux incompatibles $\{p_\xi : \xi < \omega_1\}$. On peut toujours se ramener au cas où cette famille forme un $\Delta$-système de racine $r$. La situation considérée est du type suivant : $\sup(r) < \inf(p_\xi \setminus r)$ ; il en résulte que les conditions $p_\xi \setminus r$ doivent également être incompatibles. Cela signifie que l'on est amené à la condition où $r = 0$, et donc où les $p_\xi$ sont incompatibles. On peut finalement supposer que $|p_\xi| = n$ pour un entier $n$ fixé, et aussi

$\xi < \eta \Rightarrow \sup(p_\xi) < \inf(p_\eta)$. Posons $p_\xi = \{\alpha_\xi^1, \dots, \alpha_\xi^n\}$ et $V_\eta = \cup \left\{U_{\alpha_\eta^j} : 1 \leq j \leq n\right\}$ ; si $\xi < \eta \Rightarrow \exists i\, (\alpha_\xi^i \in V_\eta)$ Dans $X^n$ considérons $x_\xi = (\alpha_\xi^1, \dots, \alpha_\xi^n)$ et $W_\eta = \cup\{X^{j-1} \times V_\eta \times X^{n-j} : 1 \leq j \leq n\}$; alors $\xi < \eta \Rightarrow x_\xi \in W_\eta$ et $x_{\eta+1} \notin \overline{W_\eta}$ et, par suite, $\{p_\xi : \xi < \omega_1\} \cap (W_{\eta+1} \setminus \overline{W_\eta}) = \{x_{\eta+1}\}$. Il en résulte que l'ensemble $\{x_{\eta+1} : \eta < \omega_1\}$ est discret dans $X^n$, ce qui contredit que ce dernier espace est HS □

Il en résulte le fait important suivant : L'espace topologique associé à la fonction $\zeta$ est un espace HL fort.

## Bibliographie


[GA05] D. Gabbay L. Maksimova Interpolation and definability - modal and intuitionistic logics, Oxford logic guides 2005

[JA99] B. Jacobs Categorical Logic and Type Theory, North Holland 1999

[KA92] A.A. Karatsuba, S. Voronin The Riemann Zeta Function, Walter de Gruyter 1992

[LA10] W. Lawvere, M. Menni The Hopf algebra of Möbius intervals Theory and Applications of Categories 24 (2010)

[LE1492] T. Leinster Basic category theory, Cambridge 2014

[PI83] A.M. Pitts Amalgamation and interpolation in the category of Heyting algebras, J. Pure Appl. Algebra 29 (1983)

[RO64] G. C. Rota Foundations of combinatorial theory I Z. Wahrscheinlichkeit theo. Verwandte Geb. Z. (1964)

[HBA00] *Handbook of Boolean Algebras, principalement le tomme 1 rédigé par S. Koppelberg, et le chapitre 14 du tome 3 rédigé par Th. Jech.*


© 2024 ISTE OpenScience – Published by ISTE Ltd. London, UK – openscience.fr