Sur la classification des Infinis numériques

About the classification of digital infinities

Claude P. BRUTER[1]

[1] Université de Paris-Est, France, bruter@u-pec.fr

RÉSUMÉ. On introduit dans cet article les définitions d'ordinalement et de cardinalement équipotents ainsi qu'une première classification d'ensembles dénombrables infinis au caractère régulier et uniforme.

ABSTRACT. This note introduce the definitions of ordinal and cardinal equipotent as well as a first classification of infinite countable sets with a regular and uniform character.

MOTS-CLÉS. Equipotence, infinis dénombrables, idéaux premiers.

KEYWORDS. Equipotence, countable infinities, prime ideals.

1. Introduction

On trouve dans divers ouvrages, comme par exemple celui de Bourbaki sur la théorie des ensembles [BOU57], des notions de base sur lesquels reposent l'édifice mathématique, l'énoncé de théorèmes premiers sur lesquels s'appuient des démonstrations ultérieures. Si l'un de ces théorèmes présente un caractère ambigu, son emploi dans certains cas peut n'être pas acceptable. C'est le cas de l'affirmation sans nuance de l'isomorphisme entre **N** x **N** et **N**: elle prête à confusion comme on va le constater.

Dans son fascicule de résultats [BOU39], page 39 et au début de la page suivante, Bourbaki écrit : « l'ensemble **N** des entiers positifs » et, deux lignes après, parle de « l'intervalle (0, n-1) de l'ensemble **N** ». Selon ce propos, Bourbaki considère donc 0 comme un nombre entier positif.

Dedekind [DED01] en 1887, ignore 0 et nomme les éléments de l'ensemble $\{1, 2, .., n, n{+}1, ...\}$ des « *natural numbers* or *ordinal numbers* or simply *numbers* ». Il note l'ensemble de ces entiers, « naturals or ordinals », de manière indifférente par la lettre grasse **N**. Bourbaki a repris cette notation à cette différence près: elle ne tient pas compte des deux significations possibles du nombre entier relevées par Dedekind.

Selon la première, les entiers dit « naturels » doivent être compris comme des représentations associées aux propriétés énergétiques d'objets ou d'évènements du monde réel. Les expressions un « champ de blé de treize hectares », un « haltère de cinq kilogrammes », ont une signification énergétique que les physiciens peuvent établir. Plutôt que naturels, il paraît préférable pour cette raison physique de les appeler des cardinaux, ce que fait d'ailleurs Bourbaki dans son livre de 1957 (E III.30 §4: « *un cardinal fini s'appelle aussi un entier naturel* »). Comme il est admis que toute présence dans le monde réel est porteuse d'énergie, 0, qui représente une absence d'énergie, ne peut figurer dans la liste des symboles associés à ce premier ensemble de cardinaux. Par souci de clarification, on notera N_e cet ensemble. Son cardinal ou taille, qui signifie ici la quantité de ses éléments, noté traditionnellement aleph indice zéro ($\aleph_0$), ne parle guère à nos sens.

Dans la seconde interprétation, les entiers sont des ordinaux: ils caractérisent une position au sein d'un ensemble, un ordre entre des objets ou évènements existant dans le monde réel. On pourrait utiliser d'autres symboles que les chiffres pour désigner ces positions. Pour rester dans la tradition, on notera $\mathbf{N_o}$ cet ensemble totalement ordonné de l'ensemble des ordinaux, ensemble que l'on peut représenter par un dessin, une chaîne sans limite. Si l'on considère que l'on classe des objets réels, présents, un symbole qui serait associé à un objet absent ne doit pas faire partie de la liste des symboles.

Dans notre réalité quotidienne, nous tenons compte que des objets peuvent, à nos yeux, être a priori absents, une absence représentée par le symbole 0. En ce cas, on notera par $\mathbb{N}_e$ (respectivement par $\mathbb{N}_o$) l'ensemble des entiers cardinaux (respectivement ordinaux) augmenté de 0.

Lorsque, par souci de simplification d'écriture, on n'a pas besoin de faire la distinction entre le caractère ordinal ou cardinal des nombres, on utilisera simplement les notations **N** ou $\mathbb{N}$.

2. Equipotence et isomorphisme

2.1. *Définitions*

Après avoir défini la notion de bijection, Bourbaki définit celle d'équipotence. Dans son fascicule de résultats ([BOU39] page 38), il écrit: *Deux ensembles E et F sont dits équipotents s'ils peuvent être mis en correspondance biunivoque*, et plus tard dans [BOU57] (en E III.23): *On dit qu'un ensemble X est équipotent à un ensemble Y s'il existe une bijection de X sur Y.*

Bourbaki établit ([BOU57] page 40) que" *tout ensemble infini dénombrable est équipotent à* **N**", dénombrable signifiant" *équipotent à une partie de l'ensemble* **N** *des entiers positifs*", par suite « *En particulier*, **N** x **N** *est un ensemble infini dénombrable* ». Par conséquent équipotent à **N**. Plus généralement , … x **N** x **N** x … x **N** x **N** sera équipotent à **N**.

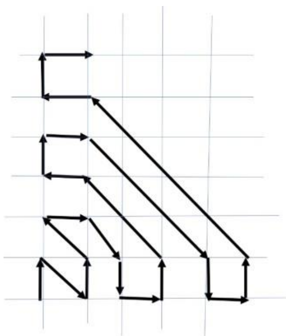
Nous verrons que cette affirmation n'est pas toujours juste, c'est le cas lorsque **N** est $\mathbf{N_o}$, mais non pas lorsque **N** est $\mathbf{N_e}$.

2.2. *Equipotence et isomorphisme selon l'ordre*

Définition 1 : Les ordres de deux ensembles ordonnés E et F sont *compatibles pour l'application* ß de E dans F si pour toute paire d'éléments (x, y) de E où y est un successeur de x, ß(y) est un successeur à ß(x) dans F.

Si cette application ß est biunivoque, E et F seront dits *équipotents selon leur ordre* ou *ordinalement équipotents* ou plus simplement *ordipotents.*

Par exemple, considérons les ensembles totalement ordonnés **N** x **N** et **N**. L'ordre sur **N** x **N** est celui des sommets d'une chaîne définie comme une trajectoire immergée dans le plan réel, passant par les points de coordonnées entières de ce plan - le sommets de la chaîne -, de sorte que, le long d'une diagonale, la somme des abscisses et des ordonnées soit constante. Voici le début de la visualisation :



Par l'application ß, cette chaîne s'étale sur celle de N : on obtient les équipotences selon leur ordre entre **N** x **N** et **N**. (On comparera cette preuve géométrique élémentaire avec celle de Bourbaki dans E.III.48 qui énonce encore simplement : *L'ensemble* **N** x **N** *est équipotent à* **N**).

Il existe une autre application µ relative à la quantité, celle du nombre d'éléments de **N** x **N** qui sont projetés sur un élément *n* donné de **N**. Dans le plan **N** x **N** rapporté à deux axes numériques, les éléments du premier facteur sont de la forme (1, *n*), les éléments du deuxième facteur sont de la forme (*n*, 1).

L'application μ est définie par :

$$\mu[(1, n), (n, 1)] = n.$$

Elle s'évalue à partir du nombre d'arêtes qui joignent [(1, n) à (n, 1) : - on notera l'orientation opposée, selon la parité de n, des chaînes qui joignent ces paires d'éléments.

La longueur en **N** x **N** du chemin qui, partant de (1, 1) se termine à (n, 1), est donné par la relation $n(n + 1)/2 + (n - 2)$ si n est impair, $n(n - 1)/2 + (n - 2)$ lorsque n est pair. La valeur de cette longueur mesure le poids de l'écrasement de **N** x **N** sur **N**.

Nous pouvons considérer un autre exemple trivial. Soit $\mathcal{P}$ le spectre de **N**, son sous-ensemble de nombres premiers (cardinaux). Il s'agit d'un ensemble infini de nombres (Euclide), plus précisément d'un "Gruyère" numérique infini (voir définition 5 ci-dessous) contenant une infinité dénombrable de trous, autant de trous qu'il y a de nombres premiers, mais la taille de chacun d'eux n'est pas connue a priori.

$\mathcal{P} = \{2, \ldots, p_i\ p_{i+1}, \ldots\}$ étant un ensemble dénombrable infini de nombres cardinaux, par construction ordonné, l'existence d'une application bijective de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{N_o}$ semble assurée (on fait correspondre au n-ème de $\mathcal{P}$ le n-ème de $\mathbf{N_o}$ et réciproquement), - pour le moment nous ne pouvons construire effectivement cette bijection que partiellement puisque notre connaissance actuelle du contenu de $\mathcal{P}$ n'est que partielle. Néanmoins, l'équipotence *selon l'ordre* de $\mathcal{P}$ et de $\mathbf{N_o}$ est reconnue.

2.3. *Sur l'équipotence selon le cardinal*

Définition 2 : On dira que deux ensembles E et F sont *cardinalement équipotents* ou ou *cardipotents* ou mieux *équicardinaux* s'il n'existe pas de partie autre que E lui-même en correspondance biunivoque avec F. On dira aussi qu'ils sont de *même taille* $\mathcal{T}$.

Considérons maintenant $\sum = [2, \ldots, n]$ en tant que segment de $\mathbf{N_e}$. n étant supérieur à 3, on montre aisément que la restriction $\mathcal{P}(\sum)$ de $\mathcal{P}$ à ce segment est de cardinal strictement inférieur à celui du segment: il en résulte que le cardinal de $\mathcal{P}$ est inférieur à celui de $\mathbf{N_e}$. L'application de $\mathbf{N_e}$ dans $\mathcal{P}$ est une projection surjective multiforme en ce sens que tout élément n de $\mathbf{N_e}$ se projette sur $p(n)$ éléments de $\mathcal{P}$: ce *nombre cardinal de projections* est au moins égal à 1. Dans ces conditions, on ne peut pas mettre $\mathbf{N_e}$ et $\mathcal{P}$ en correspondance biunivoque. Selon la définition uniforme de l'équipotence donnée par Bourbaki, $\mathbf{N_e}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas équipotents.

2.4. *Conclusion*

Si l'on s'en tient aux entiers considérés simplement comme éléments d'un ensemble infini dénombrable, l'affirmation de la page 40 : « *Tout ensemble infini dénombrable est équipotent à* **N** » ne tient donc pas toujours. Nous sommes confrontés à une contradiction, due à une confusion.

Il faut distinguer l'équipotence selon l'ordre de l'équipotence selon le cardinal, l'une n'impliquant pas nécessairement l'autre a priori. Une masse et une position sont deux objets de nature différente. Une position est une localisation instantanée sur une trajectoire, le mobile de même masse peut éventuellement revenir à l'infini sur cette même position. Il s'agit là d'une inattention de la part de Bourbaki dans la rédaction de son traité.

3. Classification élémentaire des ensembles dénombrables

La taille d'un ensemble est ce que Bourbaki nomme son Cardinal avec un grand C, l'évaluation du nombre de ses éléments. $\mathcal{T}$ n'a qu'une lettre, « Card » en a quatre. On pose traditionnellement:

$$\text{Taille de } \mathbf{N_c} = \mathcal{T}(\mathbf{N_c}) = \aleph_0$$

Les deux définitions précédentes font clairement voir la différence entre **N** x **N** et **N**. On évaluera facilement le nombre de parties de **N** x **N** cardipotentes à **N**, ou encore de même taille que **N**. En considérant les seules parties de la forme [*n*, **N**] où *n* parcourt **N**, on a la relation classique :

$$\mathcal{T}(\mathbf{N} \text{ x } \mathbf{N})^2 = [\mathcal{T}(\mathbf{N})]^2 = (\aleph_0)^2$$

On ignore ici les parties construites par réunion de segments de divers [a_n, b_n] appartenant à [*n*, **N**], les indices *n* parcourant eux-mêmes des parties de **N**.

Définition 3 **:** Deux ensembles non ordonnés E et F étant donnés, on appellera *projection multiforme* de E sur F une application µ de E dans F pour laquelle existe au moins un élément de F image de plusieurs éléments de E. Une telle projection définit a priori trois parties de E, celle dont les éléments de E n'ont pas d'autre image que l'élément vide de F, celle dont les éléments de E ont une seule image, celle dont les éléments de E ont plusieurs images.

Définition 4 : Si, deux ensembles E et F étant donnés, il existe une projection multiforme de E sur F, E sera dit de *taille* supérieure à celle de F.

Appréhender l'infini n'est pas trivial. Cantor et Russell entre autres, les spécialistes de certaines séries, en particulier celle de Riemann, en savent quelque chose. L'infini, qu'il soit physique ou intellectuel, se situe quelque part au fond d'un brouillard très lointain, situé au sein d'un espace physiquement ouvert nous semble-t-il, et non point fermé. Nous allons définir la notion mathématique de gruyère. Aussi triviale soit-elle comme ici, une classification des gruyères numériques infinis par leurs propriétés pourrait peut-être éclairer un peu la diversité riche de ce lointain obscur, l'infini[1].

Définitions 5 : On appellera *gruyère numérique* $\mathcal{G}$ une partie de **N** formée à partir de **N** dans lequel on a « creusé » c'est-à-dire ôté des trous numériques: un *trou numérique* est *intervalle connexe* [*a*, *b*] ou encore un segment de **N**: les éléments de l'intervalle forment un ensemble totalement ordonné, tout élément *x* de l'intervalle autre que *a* est le successeur immédiat d'un élément y_x de l'intervalle considéré - de sorte que $x = y_x + 1$. Parmi ces trous numériques, sont présents les intervalles *singuliers* [*z*]. On appellera *ornière* numérique dans **N**, la réunion $\mathcal{O}$ d'un ensemble de trous numériques disjoints: un gruyère numérique est donc l'intersection de **N** avec une ornière numérique $\mathcal{O}$**. N** pourra être également appelé, selon son goût, le *gruyère parfait*, ou *pur*, ou *complet.*

Considérons par exemple les deux gruyères constitués, le premier, $\mathbf{N_p}$, des nombres pairs, le second, $\mathbf{N_i}$, des nombres impairs. Ils ont même nombre de trous de même taille, sont cardinalement équipotents, et selon l'ordre apparent également équipotents à $\mathbf{N_o}$. La parité de leurs éléments les distingue, ainsi alors que cette propriété algébrique élémentaire : l'opération d'addition entre deux et plusieurs éléments quelconques est stable pour le gruyère pair. Cette même opération n'est pas définie pour le gruyère impair. Pour ce gruyère, seule l'opération d'addition entre un nombre impair d'éléments est définie et stable. Par contre l'opération d'exponentiation est stable chez les deux gruyères.

Par ailleurs, par construction, $\mathbf{N_e}$ est la réunion, la somme disjointe de $\mathbf{N_p}$ et de $\mathbf{N_i}$, chacun de ces deux derniers ensembles cardipotents est une partie stricte de $\mathbf{N_e}$.

---

[1]Victor Hugo dans son po ème intitule « Magnitudo Parvi » évoque « Le sombre écrin de l'infini », et au-delà se souvenant sans doute des pensées de Pascal, « l'effarement de l'infini ». Pascal écrit aussi dans la même veine :« Tout ce qui est incompréhensible ne laisse pas d'être: le nombre infini, un espace infini, égal au fini. »

On doit donc poser : $\aleph_0 = \mathcal{T}(\mathbf{N_e}) = 2\,\mathcal{T}(\mathbf{N_p}) = 2\,\mathcal{T}(\mathbf{N_i})$

On écrira également : $\mathcal{T}(\mathbf{N_p}) = \mathcal{T}(\mathbf{N_i}) = \aleph_{(1,1)}$

Les gruyères précédents sont des gruyères uniformément 1-troués.

Définitions 6 : Plus généralement, un gruyère est *uniformément c_u-troué* si tous les trous ont même cardinal c. On le notera $\mathcal{G}(c_t)$ et l'on dira qu'il est de *type u*.

On appellera *c_r-segment séparateur*, tout segment connexe de taille c_r séparant deux trous consécutifs. Un gruyère est *régulièrement c_r-troué* si tous ses segments séparateurs ont même cardinal c_r. On le notera $\mathcal{G}(c_r)$ et l'on dira qu'il est de *type r*.

On notera $\mathcal{G}(c_u\ c_r)$ un gruyère uniformément et régulièrement troué et l'on dira qu'il est de type *ur*. On note : $\mathcal{T}(\mathcal{G}(c_u, c_r)) = \aleph_{(c_u, c_r)}$

Son complément dans le gruyère pur **N** est le gruyère $\mathcal{G}(c_r, c_u)$ de cardinal $\aleph_{(c_r, c_u)}$ et l'on a :

$$\aleph_0 = \mathcal{T}(\mathcal{G}(c_u, c_r)) + \mathcal{T}(\mathcal{G}(c_r, c_u)) = \aleph_{(c_u, c_r)} + \aleph_{(c_r, c_u)}$$

On notera par $\aleph_0 /(c_r + c_u)$ le nombre cardinal de l'ensemble des segments connexes de taille $(c_r + c_u)$ qui constituent $\mathcal{G}(c_u\ c_r)$ et $\mathcal{G}(c_r, c_u)$. Ces simples données numériques permettent donc de classer ces premiers gruyères.

Une autre famille de gruyères intéressants est celle $\{I_p,\ p \in \mathcal{P}\}$ des idéaux premiers de **N**: ordipotents certes, mais puisque $I_p = \mathcal{G}(p\text{-}1,1)$, $(I_p \cap I_q) = I_{pq}$, leur taille $\mathcal{T}(I_p) = \aleph(p\ \text{-}1,\ 1)$ décroît à mesure qu'augmente la valeur de l'entier premier p et la taille des trous. On pourra noter par $\partial(i+1,i) = (p_i\ \text{-}1)/p_{i+1}\ \text{-}1)$ le taux de décroissance de $\mathcal{T}(I_{p+1})$ par rapport à $\mathcal{T}(I_p)$. Il est mille façons, euphémisme, d'imposer des contraintes supplémentaires pour diversifier ces premières familles. La question est celle de leur pertinence, de leur intérêt pour les mathématiques et la physique.

Références

[BOR39] N. BOURBAKI, Théorie des ensembles (Fascicule de résultat), Hermann, Paris, 1939.

[BOR57] N. BOURBAKI, Théorie des ensembles, Hermann, Paris, 1957.

[DED01] R. DEDEKIND. Essays on the theory of numbers, Dover Publications, New York, 1901.

NOTE DE L'EDITEUR : En l'absence de conclusion explicite de la plume de l'auteur, la conclusion qui suit ici a été écrite par les éditeurs afin de faire le lien avec les différents articles du volume 2 du projet Lîla Entropie. Il est clair que l'entropie établissant une relation entre ce qui est et « le possible », le statut éventuellement infini et indéfini de « ce possible » joue un rôle central dans la définition de cette fonction d'état. En particulier les caractéristiques des gruyères définis par notre collègue ne peuvent en aucun cas être ignorées en particulier pour la définition du statut de l'ouverture des systèmes dynamiques.

L'article qui précède précise les définitions de nombres d'ordinalement et de cardinalement équipotents ainsi qu'une première classification d'ensembles dénombrables infinis disposant d'un caractère régulier et uniforme. On montre que l'affirmation sans nuance de l'isomorphisme **N** x **N** et **N**: peut prêter à confusion. L'article détaille des ressorts à ne pas oublier lors des applications de cet isomorphisme. Il met en outre en exergue en particulier, le caractère physique de certains nombres qualifiés de cardinaux pour les distinguer de facteurs d'indexation qualifiés d'ordinaux. Il pointe également l'importance de la présence ou de l'absence de zéro dans les questions soulevées par l'équipotence donc de la correspondance biunivoque. En particulier, selon la définition uniforme de l'équipotence donnée par Bourbaki, $\mathbf{N_e}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas équipotents contrairement à ce que peut laisser croire l'intuition. Il faut distinguer l'équipotence selon l'ordre de l'équipotence selon le cardinal, l'une n'impliquant pas nécessairement l'autre. Cette observation conduit naturellement à considérer les gruyères numériques $\mathcal{G}$ constitués d'une partie de **N** formée à partir de **N** dans lequel on a « creusé » c'est-à-dire ôté des trous numériques, soit encore des segments ordonnés de **N** L'exemple des distinctions algébriques des ensembles de parité distinctes montre la subtilité des précautions à prendre sous l'apparence d'isomorphismes approximés. Il en est de même avec la question des idéaux et du traitement par le biais des filtres.

Note historique de l'auteur

1)Le texte qui suit, de la main d'Alain Le Méhauté, fait part de sa réaction à la première lecture de mon texte. Il a accepté que son commentaire soit ici publié. Je suis heureux de l'en remercier chaleureusement.

Mon cher Claude,

Je viens de parcourir rapidement ton article. Il est particulièrement pertinent car tu pointes une question importante: la différence entre les intensités (EQ) et les extensités (QE), dont les physiciens et les certains mathématiciens, à la différence de William Lawvere par exemple, ne mesure pas la portée épistémologique. Une des grandes difficultés que rencontrent les physiciens est qu'ils mélangent souvent les deux types de grandeurs sous prétexte d'une part, que les deux entités s'expriment par des nombres, et d'autre part que la grandeur Energie s'exprime par des relations linéaires ou quadratiques entre elles. C'est le cas en Mécanique, en particulier en mécanique quantique, parce qu'alors l'impulsion conservative p=mv et la vitesse v interviennent pour définir l'énergie [ML^2t^{-2}] et que l'action (ML^2t^{-1}) n'est rien d'autre que le calque de $\mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relation donnant une autosimilarité quadratique associée au théorème de Pythagore. Toute cette belle mécanique se brise lorsque l'autosimilarité devient quelconque et lorsque le continu n'est plus dérivable.

Dans les articles que je dois te passer il y a celui de W. Lawvere qui distingue avec subtilité la notion de quantité d'espace (QE) et la notion d'espace des quantités (EQ). Cet article d'une profondeur inouïe semble ignoré de beaucoup de scientifiques. Ton article est une alerte de même nature me semble-t-il.

[LAW97] Lawvere William and Schanuel Stephen *Conceptual mathematics : a first introduction to categories* Cambridge University Press (1997) Cambridge.

[LAW12] Lawvere William, *Categories of space and quantity , the space of mathematics,* Eds Javier Echeveria, Andoni Ibassa, Thomas Marmam, de Gruyter (2012) 14-30.

2) Cet article m'a été inspiré par la lecture d'un texte où l'auteur parvenait à sa conclusion à des fins cardinales en faisant appel à l'isomorphisme de **N** x **N** sur **N** qui ne tient que dans le cadre ordinal.

Ce n'est pas parce qu'il n'y a pas de longues preuves que l'article est obligatoirement trivial. Ce que j'ai nommé « gruyère » est, dans ce cas particulier des nombres, un autre nom (plus complet et avec une touche d'humour) pour ce qu'on appelle de manière plus générale et sophistiquée une « variété à trous ». Certains topologues pourraient être intéressés à compter le nombre de trous dans leurs variétés, et commencer à préciser ces nombres (penser à l'univers et à ses galaxies et étoiles considérées comme des trous dans tout l'espace). Certains mathématiciens pourraient élargir le contenu de l'article.

J'avais proposé à La Gazette des Mathématiciens de publier l'article. On m'a suggéré de le publier dans une autre revue mathématique française de faible audience, avis que je n'ai pas suivi parce qu'en fait le contenu de l'article serait complètement ignoré. Or, à mon sentiment, ce contenu présente de l'intérêt, un sentiment partagé par Alain Le Méhauté qui fait œuvre de réflexion plus approfondie que bien d'autres. Je me réjouis, et le remercie, qu'il ait proposé de publier l'article dans une revue de physiciens, qu'ils aient reçu une formation d'ingénieurs ou proprement universitaire. Ils ont en général une aperception de la réalité souvent plus pénétrante et utile que celle de bien des mathématiciens modernes.

Je me suis interrogé : le conseil d'administration de la Gazette aurait-il été gêné par ce que, d'une certaine manière, je reproche à Bourbaki - il était jeune à l'époque ? L'œuvre de Bourbaki n'est-elle pas considérée comme un monument intouchable ? Commettrais-je un crime de lèse-majesté, à la manière de cet Hippase qui aurait dévoilé l'un des secrets de la secte ?

Ce n'est qu'au 19ème siècle que l'on a introduit la notion d'ordre dans les considérations mathématiques et qu'on a commencé à la formaliser. Le jeune Bourbaki n'y a guère prêté attention. La notion de treillis par exemple ne figure dans aucun des deux ouvrages de Bourbaki que je cite. Après la seconde guerre mondiale, les jeunes mathématiciens qui ont travaillé sur les structures ordonnées n'ont pas eu, c'est un euphémisme, les faveurs de Dieudonné par exemple. Autre exemple: le grand mathématicien français et non bourbakiste, Arnaud Denjoy a publié entre 1952-1954, chez Gauthier-Villars, 4 ouvrages sur « l'énumération transfinie », principalement consacrés à la notion d'ordinaux. François Apéry m'a raconté cette anecdote: au cours d'un exposé de Denjoy sur son travail, Chevalley manifesta en termes vifs son mécontentement. Dieudonné s'y opposa disant à Chevalley « On ne peut pas, c'est Denjoy quand même ».

Après la mort de Denjoy, sa famille m'a envoyé un exemplaire de son beau dernier livre «*Hommes, Formes et le Nombre* ». On peut supposer que ce geste traduisait une aimable marque d'attention. D'une certaine manière, mon modeste article est aussi une sorte d'hommage à Arnaud Denjoy.