La fonction zêta de Riemann ou l'ombilic des mathématiques pour traiter de la complexité (1)

The Riemann zeta function or the navel of mathematics to deal with complexity (1)

Philippe Riot[1]

[1] Laboratoire SCIQ, ESIEA Numérique et Société, 9 rue Vésale, 75005 Paris, France, philipperiot@zetainnovation.com

RÉSUMÉ. La fonction zêta de Riemann est identifiée d'une part comme un substitut du prédicat d'égalité et d'autre part comme modèle du continu. Grâce à cette seconde interprétation la conjecture de Riemann concernant la distribution des zéros non triviaux de cette fonction n'est pas résolue ici mais dissoute au sens où son énoncé s'avère équivalent à un axiome essentiel de la technique de forcing, additionnel aux axiomes ZFC, à savoir l'axiome de D. Martin. Pour des raisons pratique de longueur du texte, la restitution de l'étude de cette fonction est scindée en deux parties. La première se concentre sur l'interprétation de la fonction zêta comme interpolateur logique tandis que la seconde partie sera consacrée à l'étude topologique et ordinale permettant de comprendre la signification de l'énoncé de Riemann concernant la localisation des zéros non triviaux de cette fonction. L'interprétation de la fonction résultant de l'étude dont les deux articles restituent les principales conclusions expliquent le rôle central tenu par cette fonction non seulement en mathématiques, mais aussi dans de nombreux autres domaines scientifiques, en particulier pour étudier le comportement de systèmes complexes.

ABSTRACT. The Riemann zeta function is identified on the one hand as a substitute for the equality predicate and on the other hand as a model of continuity. Thanks to this second interpretation, Riemann's conjecture addressing the distribution of non-trivial zeros of this function is not resolved here, it is dissolved in the sense that its statement turns out to be equivalent to an essential axiom of the forcing technique, namely the Martin's axiom. For practical reasons of length of the text, the restitution of the study of this function is divided into two parts. The first focuses on the interpretation of the zeta function as a logical interpolator while the second part will be devoted to the topological and ordinal study to understand the meaning of the Riemann statement concerning the location of nontrivial zeros of this function. The interpretation of the function resulting from the study, the main conclusions of which are presented in both articles, explains the central role played by this function not only in mathematics, but also in many other scientific fields, in particular to study the behavior of complex systems.

MOTS-CLÉS. Fonction Zêta, Catégories, Feuilletage, Filtre, Interpolation.

KEYWORDS. Zeta Function, Category theory, Covering, Filter, Interpolation.

1. Introduction :

La fonction ζ dite de Riemann, déjà connue d'Euler presqu'un siècle plus tôt avant que le premier ne publie son article fameux en 1859, s'est révélée importante dans de nombreuses théories mathématiques, et même bien au-delà [KA92]. De très nombreux travaux y sont consacrés, mais une partie du mystère demeure ; tout particulièrement pour expliquer son caractère en quelque sorte universel, et pour rendre compte de certaines propriétés fonctionnelles admettant de nombreuses implications utiles.

Henri Poincaré a écrit ainsi que « *Les mathématiques sont le système qui donne le même nom à des choses différentes* ». Il s'agit de le prendre au mot. Comme cela a dû être relevé de multiples fois, la science mathématique consiste à cheminer le long d'une ligne de crête surplombant deux abîmes, la tautologie et l'incohérence. Dans la savoureuse histoire illustrée de Christophe, la servante Scholastique s'étonnait auprès de son maître, le savant Cosinus, ne comprenant pas l'utilité d'écrire des tas de choses pour arriver à mettre dans le bout « $=0$ ». En effet, la tautologie « $a=a$ » ne mérite pas une heure de peine ; mais l'écriture « $a=b$ », avec « $b\neq a$ », soulève immanquablement le risque de l'incohérence. Nous nous proposons de mettre en évidence que la fonction ζ met en forme et permet par conséquent de résoudre ce dilemme de manière à la fois formelle et universelle. C'est à la lumière de ce constat que nous considérons cette fonction comme l'un des outils les plus importants de toutes les mathématiques, sinon le plus important.

En premier lieu, il convient d'éviter toute propension calculatoire, dans la perspective de comprendre quelle est la pertinence de facteurs structuraux qui sous-tendent la définition, ou construction, de la fonction ζ, aussi l'approche la plus couramment utilisée basée sur la théorie des fonctions analytiques est ici totalement négligée. Nous exposons les idées essentielles dans le corps du texte en nous efforçant de réduire les éléments techniques au strict minimum, certains développements plus exigeants sont reportés dans plusieurs annexes.

2. Une approche intuitive de la fonction zêta :

Nous proposons dans une première étape une construction faisant appel à l'intuition qui transpose le prédicat d'égalité en constructions équivalentes de nature topologique, ensembliste, géométrique et finalement opérationnelle. De manière implicite la fonction ζ émerge comme nouvelle formulation du prédicat d'égalité.

Nous parlons d'objets, nous pourrions tout aussi bien parler d'événements ; au demeurant, dans la perspective d'utiliser ultérieurement les résultats acquis dans les sciences physiques, il est certainement préférable de considérer la notion d'événement plutôt que celle d'objet qui évoque bien trop une vision substantialiste qui est depuis longtemps caduque. Un second commentaire liminaire s'impose. Depuis que les mathématiciens ont appris à apprivoiser le concept d'infini - cela démarre avec Bolzano, puis prend définitivement forme avec Cantor – il est devenu usuel de manipuler des ordinaux ou des cardinaux de grande taille. Si cela est bien fondé, et ne pose pas de difficulté conceptuelle, il ne faut jamais perdre de vue que d'un point de vue concret, c'est-à-dire dans l'usage opérationnel des mathématiques que l'on rencontre dans toute manipulation calculatoire dans quelque domaine que ce soit, nous ne pouvons jamais utiliser autre chose qu'une grandeur finie, la plupart du temps ramenée à être soit un entier, soit une suite binaire finie. Au mieux nous pouvons prétendre approcher asymptotiquement l'infini dénombrable.

Identifier des objets suppose concrètement, d'une part, pouvoir les étiqueter par des entiers, et d'autre part, être en mesure de les séparer les uns des autres. Nous supposons avoir affaire avec une collection de grande taille de tels objets, formellement de cardinal infini dénombrable. Imaginons que ces objets soient éparpillés sur un plan euclidien plat.

Deux objets distincts, représentés géométriquement par un espace connexe (autrement dit d'une seule pièce), par exemple un disque, forment un espace discret ; c'est-à-dire ils sont séparés par un trou. La flèche en pointillé est formelle ; elle n'a pas de matérialité, il n'y a pas de matière entre a et b.

Une manière de représenter, ou de matérialiser, l'égalité $a = b$ est de créer un chemin reliant les deux objets permettant que le premier objet se substitue (ou « se superpose ») au second ; cela peut être réalisé en remplaçant la flèche formelle par une flèche substantielle :

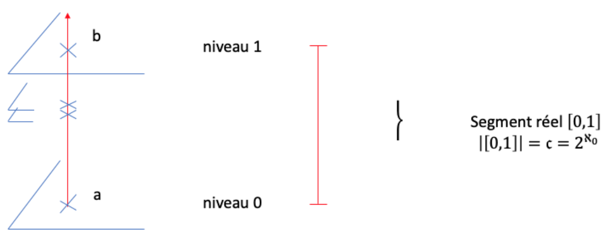
D'un point de vue topologique un objet connexe est créé ; cela signifie qu'il s'agit d'un objet d'une seule pièce. L'objet topologique créé peut être déformé de manière continue : cela peut être effectué, par exemple, en contractant la flèche pleine, ou encore en l'épaississant :

Un objet topologique quelconque peut être appréhendé en considérant toutes les fonctions continues prenant leurs valeurs dans un autre ensemble, ou espace, par exemple l'ensemble des entiers ou l'ensemble des réels. Ces deux exemples doivent être soigneusement distingués. Dans le cas où l'ensemble des valeurs accessibles vaut $\mathbb{N}$; si l'espace topologique est connexe, autrement dit d'une seule pièce, la valeur d'une telle fonction numérique ne prend qu'une seule valeur sinon il faudrait scinder l'espace en plusieurs morceaux pour attribuer différentes valeurs, ce qui crée des discontinuités, remettant en cause l'hypothèse de continuité. Attribuer une quantité arithmétique peut être illustré par l'attribution d'une couleur déterminée. Il en résulte que l'objet obtenu à l'issue du processus de déformation est un nouveau disque monocolore. Notons que la restriction des valeurs des fonctions à l'ensemble $\mathbb{N}$ se justifie grâce au commentaire initial qui pointe l'incapacité concrète à franchir la limite de l'infini dénombrable.

Revenons à la première étape où il s'agit de remplacer la flèche formelle par une flèche substantielle. Le procédé pratique le plus simple est d'intercaler un objet tiers entre les deux premiers, cela suppose de pouvoir disposer d'une réserve de copies des objets en jeu. La construction du chemin initial se décompose en la construction de deux chemins consécutifs mais à une échelle plus réduite ; ainsi se trouve engagé un processus inductif. On est ainsi (saut de ligne intempestif)

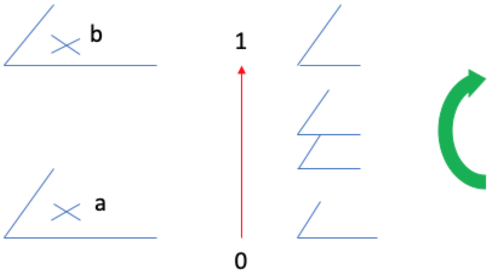
Amené, à l'issue d'une récurrence dénombrable, à substituer l'intervalle réel borné par un ensemble dénombrable qui l'approche de manière dense. Est-il possible de poursuivre le procédé au-delà de cette borne ? La question du passage du discret au continu est posée. Cette situation est classiquement abordée en topologie et débouche sur la théorie de la catégorie de Baire.

L'approche précédente consistant à introduire un processus d'induction itératif revient à exprimer une propriété d'invariance par changement d'échelle.

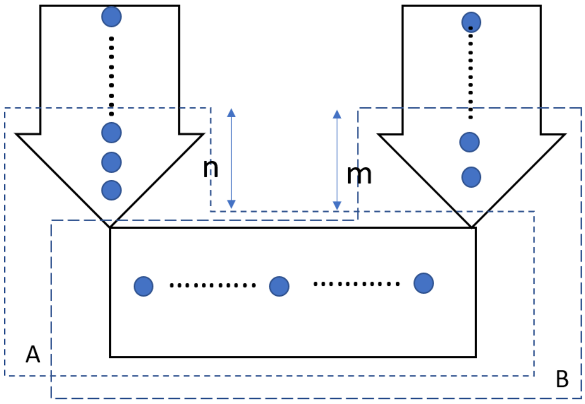


Une approche complémentaire de la démarche précédente consiste à imaginer l'élément étiqueté « a » comme élément d'un ensemble dénombrable d'objets étiquetés par conséquent par les entiers naturels, par exemple dispersé sur un plan réel. On peut ensuite considérer toutes les copies de ce même ensemble dans les lesquels les éléments sont énumérés de manière différente, cela revient à considérer tous les voisinages de l'objet a. il existe une quantité de puissance le continu de tels copies. Cela revient à établir une échelle à valeurs réelles orthogonale au plan initial. Une telle construction se justifie de la manière suivante. Les différentes copies de l'ensemble peuvent être mises en correspondance avec les différents voisinages envisageables autour d'un objet fixe. La notion de voisinage, qui sert à fonder la topologie, trouve aussi une traduction de nature logique ; les axiomes des ouverts en topologie sont calqués sur ceux qui fondent la notion de prédicat soumis à une logique des prédicats du premier ordre. Par conséquent, l'introduction des copies de l'ensemble initial s'interprète alors comme la collection des tous les prédicats, autrement dit toutes les propriétés formellement énonçables, que l'on peut attacher à l'un quelconque des objets de cet ensemble.

Si on sait agréger les différentes copies de l'ensemble dénombrable, on peut organiser le passage de « a » à « b », situés sur un même axe vertical, on obtient un second procédé d'identification de ces deux éléments. L'axe réel correspondant peut être lu comme une quantification du degré de vérité. Cette agrégation revient à transposer le concept de convergence entre ensembles de points en lieu et place de la convergence entre points. Cela revient à introduire une forme de vérité floue.



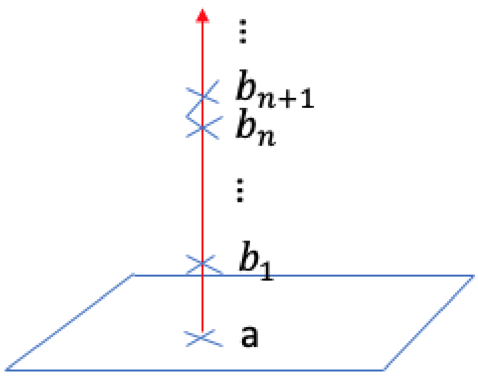
Au démarrage du procédé permettant de construire un chemin reliant deux objets distincts, il faut pouvoir disposer de copies de ces objets permettant de les intercaler entre les deux objets initialement considérés de telle sorte de pouvoir concrétiser le chemin en les déplaçant convenablement. Ce schéma peut être intuitivement réalisé en supposant que la donnée d'un objet initial, dénommé « a » ou « b », est équivalent à la donnée d'une quantité dénombrable de répliques ; il s'agit ensuite de contrôler leur « déversement », ou introduction afin de construire de manière appropriée le chemin, ou la flèche matérielle. Cela se représente de la manière suivante :



On peut modéliser le mécanisme dynamique de manière ensembliste en identifiant deux ensembles infinis dénombrables notés A et B. De ces deux ensembles s'en déduisent deux autres : $A \cap B$ et $A \Delta B$ avec : $\min(A \Delta B) = a$ et $\max(A \Delta B) = b$; $A \cap B$ est la représentation ensembliste de la flèche ou chemin construit récursivement entre a et b. La mise en forme proposée suggère une relation d'ordre qui va permettre d'organiser les copies du plan discret tel que cela a été envisagé dans l'approche précédente.

L'identification de « a » et de « b » peut être mis en forme par quantification de la vérité de l'égalité « $a = b$ » entre les deux niveaux 0 – correspondant à $a \neq b$ – et le niveau 1 – correspondant à $a = b$ – par interposition de multiples copies de plan discrets de puissance continue, de telle sorte que le procédé peut de nouveau être itéré une quantité dénombrable de fois, ce qui ne modifie pas la puissance du continu ($\aleph_0 \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$).

Il en résulte que tout le long d'un axe orthogonal au plan de base au-dessus d'un élément de base qui peut être pris égal à 0, un ensemble dénombrable d'éléments est de nouveau engendré potentiellement identifiables avec l'élément de base 0 avec le degré de vérité valant 1. Cette situation est au demeurant cohérente avec l'hypothèse faite dans la mise en forme précédente qui permet de faire croître l'intersection de deux ensembles dénombrables A et B tout en maintenant fixe leur différence symétrique. D'une certaine manière la situation peut être appréhendée synthétiquement en disant que par le truchement du continu, servant à quantifier le degré de vérité, on peut engendrer le dénombrable, réalisant de la sorte une inversion du procédé diagonal.



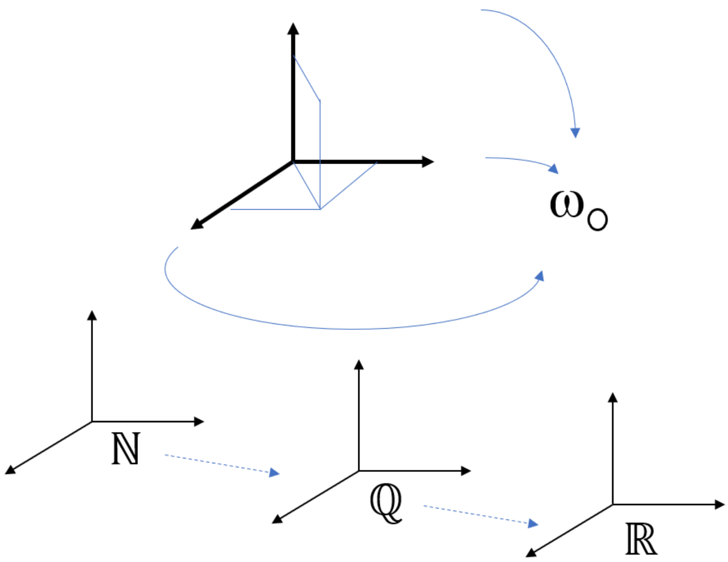
Le fait ainsi de substituer à un objet étiqueté par un entier quelconque un ensemble infini dénombrable peut être lu à rebours comme la possibilité de manipuler l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$ tout entier comme un objet, à soi seul, également muni d'une étiquette identifiable à un entier ; cela revient à ramener l'infini dénombrable au fini. Du point de vue de la topologie cette possibilité constitue une propriété appelée compacité.

Du fait que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, isomorphisme fondamental, il apparaît clairement que la capacité d'identifier $\mathbb{N}$ comme un unique objet labélisé par un entier est possible tant que la construction demeure dans le domaine du dénombrable au plan cardinal, c'est-à-dire fondamentalement à isomorphisme près. Une difficulté apparaît si l'on veut poursuivre le même procédé au-delà du dénombrable, exigence nécessitée par le fait que la construction requiert d'atteindre la puissance du continu. Il faut en quelque sorte forcer la démarche à demeurer valide au-delà du dénombrable. La propriété fondamentale de l'arithmétique nous y aide puissamment.

Considérons en effet comment sont représentés les entiers grâce à la décomposition en produit de puissances d'entiers premiers. L'écriture multiplicative de la représentation peut être restituée de manière équivalente par une représentation additive engendrant un espace algébrique linéaire de dimension infinie dénombrable. A chaque entier premier est associé un axe indépendant, grâce à la décomposition en facteurs premiers, la donnée d'un entier quelconque consiste en la donnée d'un ensemble fini d'autres entiers qui sont les exposants des facteurs premiers impliqués dans la factorisation unique de ce même entier ; les exposants tiennent le rôle de coordonnées dans un espace linéaire de dimension infinie dénombrable. Pour une copie de $\mathbb{N}$, la même lecture algébrique est engendrée, à laquelle est attachée un changement d'échelle permettant de distinguer les copies entre elles. Ainsi, pour un ensemble dénombrable de copies, on peut diviser les coordonnées par la succession des facteurs $^1/_n$, où n parcourt . Autrement dit, le procédé engendre le sous-espace dans un espace linéaire sur le corps $\mathbb{Q}$ rassemblant les vecteurs admettant un nombre fini de coordonnées. Il semble intuitif de poser qu'en prolongeant au-delà du dénombrable l'empilement de copies de $\mathbb{N}$ le procédé engendre la reconstitution des axes en quantité dénombrable étiquetés par chaque entier premier sur le corps des réels, voire même sur le corps des complexes. Le mécanisme qui vient d'être présenté se lit de manière équivalente comme suit. Le balayage sériel ou séquentiel de l'ensemble des entiers, qui fait appel à la structure de $\mathbb{N}$ engendrée par l'opérateur successeur, constitue une approximation d'une quantité dénombrable d'ensembles également dénombrables, paramétrée par les entiers premiers, qui constitue une collection devant être considérée globalement et engendrée parallèlement. La construction précédente consiste à transformer une description sérielle d'un ensemble qui est progressivement élargi en une description parallèle d'un autre ensemble dénombrable mais fixe. Si cette construction peut être poursuivie jusqu'à aboutir à l'empilement d'une quantité ayant la puissance du continu, elle engendre un espace linéaire de dimension infinie dénombrable défini par la donnée d'axes linéairement indépendants. Un tel espace est ensuite identifié à un espace de Banach.

Une autre manière de synthétiser le phénomène consiste à dire que l'accumulation séquentielle, qui est réalisée par le truchement de l'opérateur de sommation, soit encore l'opérateur booléen de disjonction, est de manière équivalente représentée par la création simultanée d'une famille infinie dénombrable d'ensembles, autrement dit une création parallèle réalisée par l'opérateur de produit cartésien, qui s'identifie à l'opérateur booléen de conjonction,. Cela signifie également qu'un modèle de continu est représentable par une famille infinie dénombrable d'ensembles disjoints.

A l'issue de cette reformulation de l'application du prédicat d'égalité, nous retenons que ce prédicat peut être représenté par la fonction ζ, soit encore par un espace linéaire de type Banach. Cependant le passage du dénombrable au continu, qui apparaît absolument intuitif et donc apparemment autorié, est mis en évidence comme une étape cruciale qui se formule de plusieurs manières, par organisation ordonnée d'une construction ensembliste de couples d'ensembles croissants dont la différence symétrique est maintenue fixe et dont l'intersection est supposée croissante jusqu'à atteindre la puissance du continu, ou bien encore comme opération permettant de transformer une description séquentielle, autrement dit par disjonction, en description parallèle, autrement dit conjonctive, sous l'hypothèse de maintenir fixe et dénombrable cette dernière. Enfin, la construction débouche sur un résultat qui présente un air de famille avec l'énoncé de la conjecture de Riemann relative à la distribution des zéros non triviaux de cette même fonction ζ.



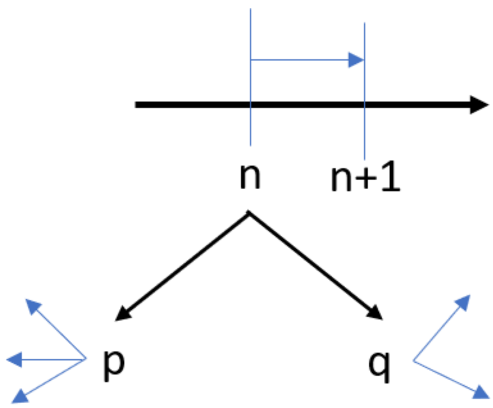
Le schéma de pensée que nous venons de détailler introduit implicitement la plupart des notions, concepts et théories que nous allons mobiliser afin de décoder en quelque sorte la nature de la fonction ζ et sa propriété fonctionnelle conjecturale relative à la distribution de ses zéros.

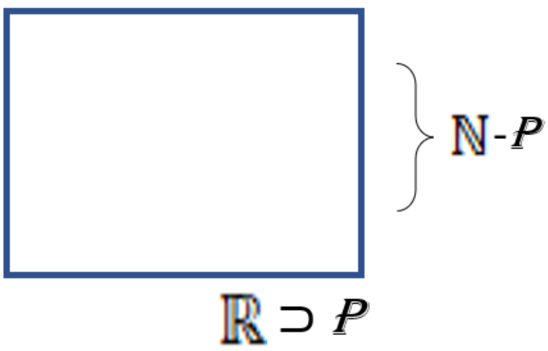
3. La source ou le royaume de l'arithmétique de Peano :

Comme cela fut formulé pour la première fois par le mathématicien italien Giuseppe Peano à la toute fin du XIXième siècle, l'ensemble des entiers naturels peut être construit sur la base de quelques axiomes, en introduisant l'opérateur successeur rendant compte du passage d'un entier « n » à l'unique entier qui lui succède « n+1 ». Cet ensemble, noté classiquement $\mathbb{N}$, constitue une structure d'ordre total, dans la mesure où deux éléments quelconques sont classés systématiquement l'un par rapport à l'autre. L'opérateur successeur engendre la loi d'addition. Une propriété fondamentale doit être ici mentionnée, l'ordre précédent est un bon ordre, ce qui signifie par définition que tout sous-ensemble de l'ensemble des entiers naturels admet un plus petit élément au sens de cet ordre. Il est utile de rappeler que l'existence d'un opérateur successeur et le bon ordre permet de fonder le raisonnement par récurrence, si essentiel aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées, notamment en permettant de fonder la notion d'algorithme. De plus, la propriété de bon ordre est un outil essentiel en arithmétique en permettant le principe de descente introduit pour la première fois par Fermat.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une seconde loi, la multiplication, qui est en fait directement issue de l'addition en tant qu'itération de cette dernière, en introduisant un autre concept algébrique dénommée distributivité qui s'explicite au travers de l'introduction des parenthèses. De manière concrète, la multiplication se définit comme : $n \times m = n \times (1 + 1 + \cdots + 1) = n + \cdots + n\ (m\, fois)$. Quoiqu'issue directement de l'addition, la multiplication modifie profondément la structure des entiers ; en effet, liée à cette seconde opération un nouvel ordre est introduit, celle de divisibilité. Désormais, cet ordre n'est plus total puisque pour un couple d'entiers quelconques (n,m), il n'est pas toujours vrai que soit n divise m, soit m divise n. De plus un concept fondamental émerge, à savoir celui d'entier premier : un entier est premier s'il n'est divisible que par l'unité 1 et par lui-même, autrement dit si l'implication suivante est valide : $p = ab \Rightarrow a\ ou\ b = p$. La distinction entre les entiers premiers et ceux qui ne le sont pas entraîne des conséquences considérables. Nous en fournissons immédiatement une double conséquence liée à la fois à la topologie et à la notion d'ordre. La notion de priméité se transpose en topologie de la manière suivante : dans un espace topologique X un point x détermine un ouvert caractéristique, le complément de l'adhérence de ce point $X \setminus \overline{\{x\}}$. L'opérateur qui se substitue à la multiplication dans une structure ensembliste, de nature booléenne ou topologique, est l'intersection ; la transposition du concept d'élément premier se lit : $U \cap V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}} \Rightarrow U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ ou $V \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$. Sous des hypothèses partagées par une classe large d'espaces topologiques (mais il existe des classes importantes d'espaces topologiques qui ne les respectent pas), cette implication est satisfaite grâce au raisonnement simple : $x \notin U$ (ou $x \notin V$) : $x \in X \setminus U$, soit $\overline{\{x\}} \subseteq X \setminus U \Rightarrow U \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ (idem avec V)

Comme il existe une correspondance naturelle entre un point x et l'ouvert $X \setminus \overline{\{x\}}$, il ressort qu'un point de la droite réelle est assimilable à un entier premier, et uniquement à un entier de cette nature. Une première conclusion s'impose ; autant les structures additives de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$ sont naturellement cohérentes entre elles, cela n'est plus le cas dès que la structure multiplicative est mise en jeu. Ce fait important peut être appréhendé de manière intuitive en considérant la structure d'ordre partiel de divisibilité. Dans ce cadre, les entiers premiers sont uniquement des sources de flèches représentant la relation de divisibilité entre ces premiers et d'autres entiers en général ; si les entiers premiers sont identifiables à des points réels classés dans l'ordre croissant d'énumération qui correspond exactement à l'ordre linéaire total lié à l'addition, les autres entiers ne peuvent pas être identifiés à d'autres points réels puisqu'alors le rabattement des flèches marquant la divisibilité ne respecte plus l'ordre linéaire croissant attaché à la droite réelle munie de sa structure d'ordre naturelle. En revanche, il apparaît plausible d'obtenir une représentation géométrique cohérente en dispersant adéquatement les entiers naturels non premiers dans le demi-plan au-dessus, ou en- dessous, de la droite réelle.



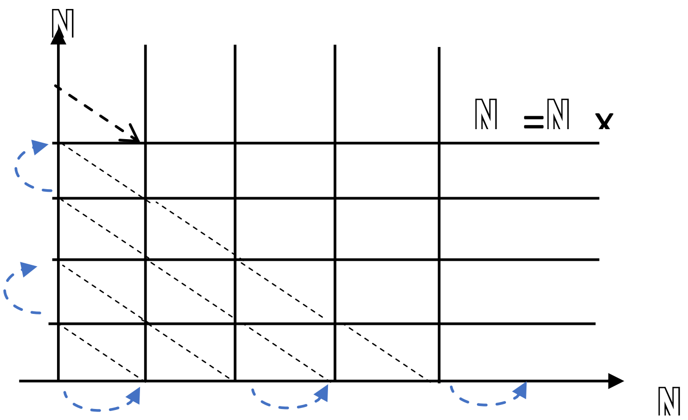


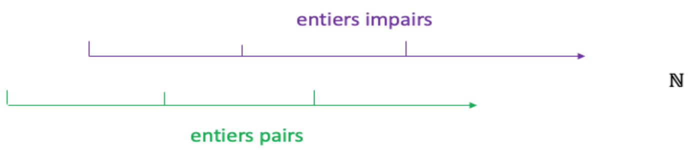
4. La double nature algébrique et topologique de $\mathbb{N}$:

La structure additive $(\mathbb{N},+)$ est algébrique au sens où il est possible d'associer un élément de la structure à une association binaire, plus généralement un n-plet, respectant certaines règles parmi lesquelles l'associativité. L'opérateur de somme s'identifie dans de nombreux cas de figure à l'opération d'union (disjointe) de nature ensembliste. La structure multiplicative $(\mathbb{N},\times)$, qui possède également une nature algébrique, engendre la notion de topologie grâce en particulier à son assimilation à la notion ensembliste d'intersection. De manière intuitive, le concept de topologie est relié à la donnée d'un système de propriétés observables exprimables comme système de prédicats logiques dont la satisfaction peut être établie en un temps fini. Si $\mathcal{PO}$ est un ensemble fini de propriétés observables formalisées en prédicats logiques, un point de l'espace x vérifie la totalité des propriétés, ce que l'on note $\wedge\mathcal{PO}$ si et seulement si x satisfait tout prédicat : $\forall\ \varphi \in \mathcal{PO}$, ; de même, si $\mathcal{PO}$ est un ensemble quelconque de prédicats, un point de l'espace x vérifie l'une ou l'autre des propriétés, ce que l'on note $\vee\mathcal{PO}$, si et seulement si x satisfait au moins un prédicat : $\exists\varphi \in \mathcal{PO}$. L'existence de $\wedge\mathcal{PO}$ quand $\mathcal{PO}$ est fini et de $\vee\mathcal{PO}$ quand $\mathcal{PO}$ est de taille quelconque correspond exactement aux propriétés caractérisant un système d'ouverts dans un espace topologique, de telle sorte que l'on peut assimiler le concept d'ouvert topologique à une collection de prédicats observables en temps fini. Il est alors utile de mentionner une identité ensembliste particulièrement utile qui s'énonce : $(A \times B) \cap \Delta\ = A \cap B$ où Δ désigne la diagonale qui met en forme dans le cadre ensembliste le prédicat d'identité. Il est pertinent de noter dès à présent que le concept mathématique qui combine à la fois sa nature algébrique, qui relève en quelque sorte d'une combinatoire finie, et sa nature topologique qui se révèle particulièrement adaptée pour appréhender la notion d'infini, est celui de compacité que l'on peut présenter comme étant la qualité de ce qui peut être ramené au fini quoique de nature initialement infinie. Nous reviendrons ultérieurement sur cette capacité qui constitue le fil rouge de la construction de la fonction ζ.

L'ensemble $\mathbb{N}$ jouit d'une autre propriété tout aussi essentielle qui explicite sa double autosimilarité aussi bien pour l'addition que pour la multiplication : $\mathbb{N}\ \times\ \mathbb{N}\ \cong\ \mathbb{N}\ \cong\ \mathbb{N} \uplus \mathbb{N}$ (union disjointe)

Il s'agit de résultats élémentaires bien connus dont le caractère intuitif est restitué par les deux figures présentées ci-après :



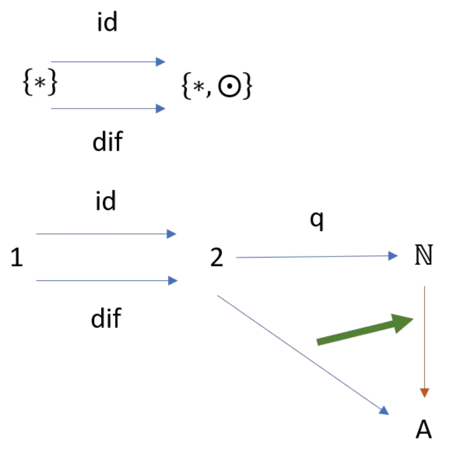


L'isomorphisme de nature multiplicative sera seul sollicité dans la suite ; la justification importante de ce privilège tient au lieu étroit qui lie multiplication, autrement dit le produit cartésien ensembliste ou catégorique, et le concept de compacité organisant le passage du fini à l'infini. La plupart des propriétés de nature topologique ne sont pas stables par passage au produit cartésien, aussi la préservation du produit s'avère être une propriété déterminante.

5. Une manière synthétique d'engendrer ℕ et plus généralement d'introduire l'infini :

Nous allons maintenant utiliser quelques-uns des concepts et des constructions de la théorie des catégories librement sans entrer dans leur formalisme et leur justification précise, en estimant qu'ils sont facilement compréhensibles sans devoir alourdir le présent article par leur explicitation. Nous invitons le lecteur à se référer à [LE14] pour une première introduction à la théorie des catégories.

Considérons deux petits ensembles, le premier singleton comprenant un unique élément noté "$*$" et le second comprenant à la fois ce même élément et un deuxième élément noté "$\odot$" ; le lecteur se convainc aisément qu'il est possible de définir deux morphismes, encore appelés flèches pour parler comme les catégoriciens, entre le premier et le second ensemble, que l'on peut noter id (identité) et dif (différence). Il est possible d'envisager un ensemble plus gros dans lequel ces deux petits ensembles peuvent être plongés, c'est-à-dire identifiés en tant que sous-ensembles de ce dernier, qui annule la distinction entre id et dif (formellement : $q \circ id = q \circ dif$) – les deux morphismes id et dif sont dits co-égalisés. De plus, condition supplémentaire importante pour donner un caractère d'universalité et d'unicité à cette construction, on impose une autre exigence, à savoir que, sous l'hypothèse qu'il existe d'autres solutions possibles, par exemple A, au plongement permettant de co-égaliser id et dif alors la première solution est minimale, autrement dit s'impose au sens où le plongement dans A s'effectue toujours au travers de la première solution (une autre manière de s'exprimer consiste à dire que l'on peut factoriser le second plongement par le premier). Un ensemble singleton s'identifie naturellement à l'entier 1, le second ensemble considéré s'identifie de même à l'entier 2, l'ensemble minimal dans lequel il convient de plonger ces deux petits ensembles est précisément l'ensemble global de tous les entiers naturels. Un minimum de gymnastique mentale convainc tout lecteur que cette manière de prime abord légèrement baroque de dire les choses est une nouvelle formulation du principe d'induction : si l'on sait qu'une propriété est satisfaite pour l'étape indicé n, si l'on sait monter que le passage de la satisfaction d'un état donné à l'état successeur est toujours possible, alors la propriété en cause est satisfaite à toutes étapes indicées par un entier naturel.



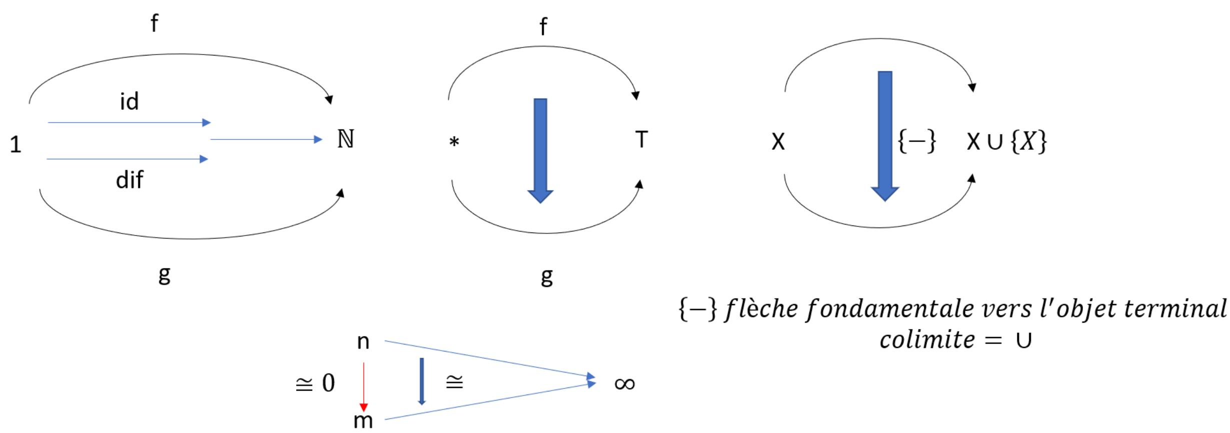
Une manière plaisante d'illustrer le résultat est d'imaginer une personne cheminant le long d'une voie de chemin de fer déployée en ligne droite qui traverse une plaine aride de grande dimension, disons le désert d'Atacama, sans relief constituant des amers distinctifs ; il a beau cheminer allègrement en regardant fixement l'horizon et le point de fuite que constitue le croisement de la ligne de chemin de fer et la ligne d'horizon, il a néanmoins l'impression de faire du sur-place. Une autre manière d'exprimer le même état de fait consiste à constater que le nombre d'étapes à franchir pour atteindre l'infini dans ℕ en partant de l'entier n est le même que le nombre d'étapes comptées à partir de l'entier m, même si la différence entre les deux entiers n et m est grande mais toujours finie; ce qui est en jeu est le rapport entre le fini et l'infini.

Un lecteur attentif au fil du discours constate ainsi que par la construction précédente, l'énigme énoncée dans l'introduction, à savoir « comment peut-on aboutir à une égalité non tautologique,

« $a = b$ », avec « $b \neq a$ » ? » trouve une première solution. Vus depuis l'infini, n et m sont égaux ; on a remplacé l'égalité par la co-égalité. Comme le disait Laurent Schwartz, « faire des mathématiques, c'est pratiquer l'abus de langage ». Ainsi les mathématiciens sont des abuseurs, mais sympathiques et bougrement utiles !

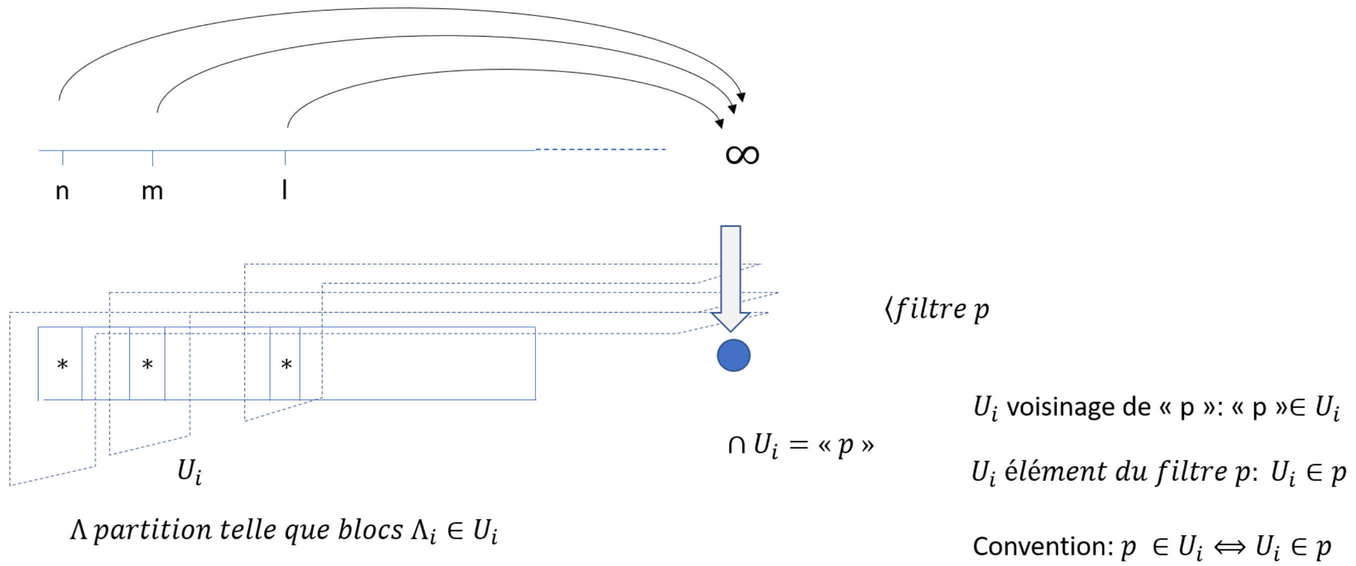
Arrivé à ce stade, nous nous livrons à un exercice de gymnastique mentale, que nous pourrions appeler « yoga diagrammatique ». Tout cela est vraiment sérieux, justifié par la théorie des catégories, et clairement intuitif. La construction universelle que nous avons décrite, que les catégoriciens dénomment co-noyau, est restitué par le diagramme situé en bas à gauche dans la figure suivante. Sa lecture revient à dire que les deux flèches composées, notées respectivement f et g, sont co-égalisées, cela est transcrit par l'introduction d'une flèche verticale épaisse allant de la première à la seconde (ce type de flèche [JA99] s'appelle une transformation naturelle). Dans l'univers symbolique dans lequel nous nous situons, toutes flèches composées aboutissent à un même objet ; un tel objet en théorie des catégories est usuellement appelé l'objet terminal (unicité à isomorphisme près). La flèche du haut « f » consiste à transporter l'objet de départ tel quel dans l'objet terminal, en nous plaçant dans le cadre de la théorie des ensembles, l'ensemble X est transporté identique à lui-même donc noté sans modification, le second objet est également transporté en tant que tel dans l'objet terminal, mais comme il est co-égalisé avec le premier au travers de la transformation naturelle, il est nécessaire d'en modifier la notation tout en préservant le fait qu'il y a identification de substance ; comme cela s'inscrit dans le cadre ensembliste et qu'il s'agit de flèches pointant vers l'objet terminal, la lecture catégorique de la théorie des ensembles nous impose d'identifier la transformation naturelle comme étant l'opérateur singleton qui engendre canoniquement un ensemble à partir d'un élément de départ, les deux flèches se combinent grâce à l'union ensembliste (une fois encore, un catégoricien retrouve l'identification d'un co-noyau comme co-limite, qui elle-même généralise le concept d'union ou somme). Le diagramme de gauche s'identifie au diagramme apparemment plus général situé à droite, qui redonne au demeurant le premier car :$1 \cup \{1\} = 2$ en théorie des ordinaux. Le diagramme précédent met en jeu l'opération qui crée les ordinaux successeurs en théorie des ordinaux dans l'approche de von Neumann. La morale à tirer de cette lecture s'énonce : le schéma de co-égalité débouche naturellement sur l'introduction des ordinaux, outils de base pour appréhender le concept d'infini.

Une seconde leçon peut être tirée des manipulations précédentes. Nous venons de voir que vus depuis l'infini (en l'occurrence à ce stade, l'infini dénombrable), deux entiers quelconques sont identifiés, cela est restitué en disant que la flèche menant de n à l'infini, s'obtient également comme composition de deux flèches, la première passant de n à m (m supposé plus grand que n), comme les deux flèches partant respectivement de n et m vers l'infini sont identifiées, plus précisément sont co-égalisées, cela signifie que la flèche de n vers m est considérée comme partiquement nulle, plus précisément comme négligeable. Ainsi le concept si essentiel d'infinitésimal est en germe. Tout cela est simple, mais prometteur.



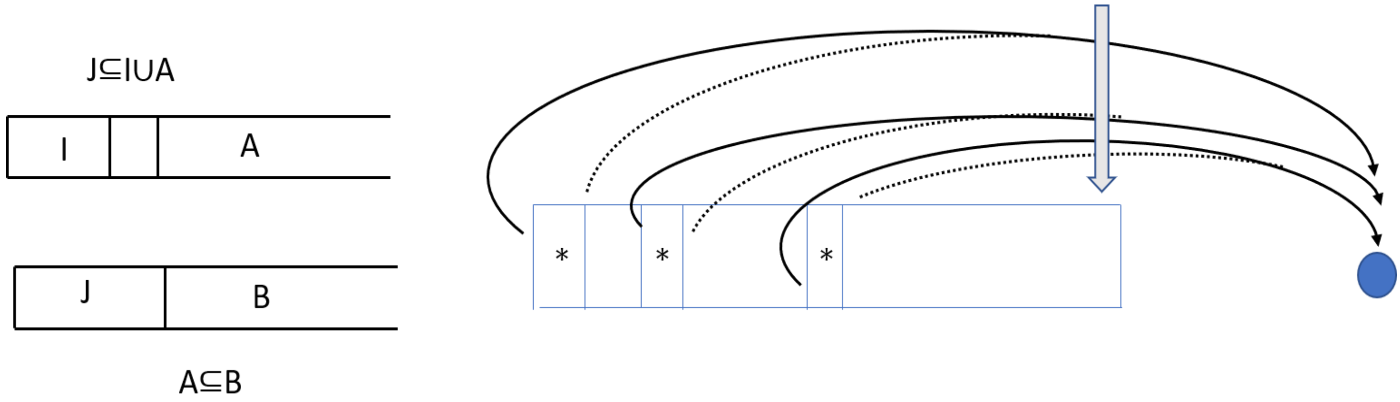
Introduction du concept d'objet et flèche infinitésimaux

Comme nous allons le décrire longuement dans la suite de l'exposé, le formalisme que nous venons de décrire de diverses manières, se référant à la théorie des catégories, va être utilisée pour interpréter la construction de la fonction ζ. Celle-ci peut être appréhendée comme l'empilement d'une quantité de copies de $\mathbb{N}$ ayant la puissance du continu. D'une manière intuitive, cet empilement se transcrit de manière ensembliste de la manière suivante (se reporter à la figure ci-dessous). Chaque flèche partant d'un entier quelconque etc…, vers l'infini dénombrable est concrètement constituée de l'ensembles des entiers qui sont ses successeurs ; on peut parler de segments terminaux. Si nous disposons de multiples copies de $\mathbb{N}$, nous pouvons alors rapporter la même construction sur le même diagramme puisque la structure catégorique demeure identique. Tout se passe comme si chaque flèche était remplacée par des flèches de plus en plus épaisses accueillant une quantité toujours plus grande d'éléments au fur et à mesure de l'empilement de nouvelles copies de $\mathbb{N}$. Les différentes flèches épaissies peuvent avoir des intersections partielles entre elles selon la position relative de leur point de départ ; en revanche prises toutes ensembles elles n'ont qu'un seul et unique point d'intersection correspondant au « point à l'infini ». Chacune des flèches est unique par son point de départ qui est pris comme étiquette. L'ensemble des étiquettes parcourt l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier, cela peut être traduit en disant que la collection des étiquettes forme une partition. Cette organisation met ainsi en jeu une collection infinie d'ensembles eux-mêmes infinis, qui fait le lien entre une partition et un objet caractérisé comme unique point d'intersection de tous ces ensembles. Une nouvelle fois, de manière intuitive et visuelle, nous disposons d'une construction de nature ensembliste qui fait le lien entre une partition, autrement dit une union disjointe totale (car couvrant $\mathbb{N}$ tout entier par définition) – soit encore une somme – et un point intersection de tous ces ensembles – soit encore un produit. Nous voyons apparaître, d'une part, sous une guise figurative la fonction ζ, et d'autre part, un objet mathématique d'un genre nouveau (dans le cadre de notre exposé) qui s'appelle un filtre, plus précisément même un ultrafiltre caractérisé avec une propriété d'intersection forte. Ce constat ouvre une perspective fertile de nature topologique, mais également de nature géométrique, qui fournira la clé de lecture de ζ.



La possibilité de superposer de multiples fois le premier système de flèches, comme cela est représenté dans la première des deux figures, se justifie par l'isomorphisme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, toute la difficulté attachée à la construction de ζ résulte du fait que le mécanisme d'empilement de copies de $\mathbb{N}$ n'est pas limitée à une itération de cardinal dénombrable, mais est poursuivi jusqu'à atteindre la puissance du continu. Cela soulève la question de l'existence d'un schéma de convergence au sein d'un collectif ayant la puissance du continu d'ensembles infinis dénombrables. Par ailleurs, la construction consiste à relier une structure disjonctive, représentée par une partition, à une structure conjonctive à gauche de type OU booléen, représentée par une intersection à droite de type ET booléen. Le prochain paragraphe met en exergue le fait que telle est bien la fonction attribuable à la fonction ζ.

La donnée d'un entier se représente par un couple d'ensembles $\langle I, A\rangle$ avec $|I| < \aleph_0$ et $|A| = \aleph_0$, de telle sorte que le balayage des entiers est transposé par une relation d'ordre sur de tels couples d'ensembles : $\langle I, A\rangle \leq \langle J, B\rangle$ si et seulement si $I \subseteq J \subseteq I \cup A$ et $B \subseteq A$. Dès lors il est possible de substituer au balayage ordonné de $\mathbb{N}$ une relation d'ordre entre couples d'ensembles de type $\langle I, A\rangle$, ce qui est représenté dans la figure suivante :



6. Introduction de la fonction zêta :

6.1. *Une définition double*

La première caractéristique fondamentale de la fonction ζ est qu'elle admet une double écriture, soit sous forma additive, soit sous forme multiplicative :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = \zeta(s) = \prod_{p\in\wp}(1-p^{-s})^{-1}$$

Le terme sur lequel s'applique l'opérateur de produit se substitue à la série formelle :

$$(1-p^{-s})^{-1} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots$$

La variable notée s est usuellement considérée comme évoluant dans un domaine du plan complexe adéquatement choisi.

6.2. *Un lien avec des catégories ordonnées*

L'étude de la fonction ζ a reçu une impulsion remarquable grâce aux travaux de Gian-Carlo Rota qui a inauguré à partir de 1966 une série d'articles d'algèbre combinatoire qui a permis d'envisager d'une nouvelle manière la fonction ζ et la fonction de Möbius qui lui est directement rattachée [LA10], fonction notée μ, en les inscrivant dans le cadre général des structures ordonnées (les résultats dégagés par Rota utiles à notre approche sont succinctement rappelés en annexe) [RO64]. A la suite de ses travaux pionniers, et sachant que les structures d'ordre constituent des cas particuliers et importants de catégories, des mathématiciens canadiens autour de Leroux ont montré que l'approche imaginée par Rota se généralisait dans le cadre catégorique. Cette approche a été ensuite parachevée au début des années 1980, quoique publié de nombreuses années plus tard, par le spécialiste de la théorie des catégories, William Lawvere [LA10]. Nous n'avons pas l'intention de restituer dans le présent article les principaux résultats obtenus, nous renvoyons le lecteur à une brève annexe qui rappelle quelques éléments. En résumé, la fonction ζ possède une nature catégorique ; si dans une catégorie donnée deux objets A et B en situation générale sont reliés par les éléments de l'ensemble de morphismes hom(A,B), ces éléments se décomposent en général par l'opérateur de composition, manifestant le fait qu'un morphisme (ou flèche) reliant A à B peut passer par d'autres objets intermédiaires. En poussant la procédure de décomposition jusqu'à son terme ultime, on aboutit à la décomposition en morphismes, ou flèches, dits élémentaires. L'équivalent catégorique de la fonction ζ énumère les décompositions en respectant une règle de graduation en alternant le décompte en faisant précéder les différents termes d'un facteur +1 ou -1.

Nous sommes ainsi pleinement justifiés à recourir au formalisme catégorique, dont le concept le plus fondamental est celui d'adjonction qui accouple des foncteurs. Pour un lecteur peu familier avec cette théorie, il suffit d'indiquer que la notion d'adjonction généralise la même opération classiquement établie en algèbre linéaire, donnant lieu par exemple à la transposition d'une transformation linéaire représentée par une matrice. En quelques mots, considérons deux catégories associées par un couple de foncteurs F et G selon le diagramme suivant, le premier foncteur F est dit adjoint à gauche du foncteur G, ce qui est noté $F \dashv G$, s'il existe un isomorphisme entre les ensembles de morphismes mentionné à droite dans la figure ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd} \qquad \mathrm{F} \dashv \mathrm{G} \qquad \mathcal{B}(F(A),B) \cong \mathcal{A}(A,G(B))$$

Dans le cas particulier des ensembles ordonnés, qui comme nous l'avons déjà indiqué, sont des catégories particulières caractérisées par le fait qu'il n'existe au plus qu'une flèche entre deux objets quelconques, la relation d'adjonction prend une forme simplifiée de telle sorte qu'il est possible de construire simplement l'adjoint à droite g d'un morphisme (= foncteur) f dès lors que l'on dispose de l'opérateur associant à tout sous-ensemble de la structure donnée la borne supérieure pour la structure d'ordre (notée $\vee$) :

Cas des structures d'ordre : $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ $\quad f(x) \le y \Leftrightarrow x \le g(y)$

f monotone, adjoint g : $g(y) = \bigvee\{x \in X \,/\, f(x) \le y\}$ et f préserve tous les sup

Dans le cadre de la théorie des catégories [JA99], il est bien établi qu'il existe plusieurs diagrammes enchaînant deux adjonctions consécutives qui justifient que, sous certaines conditions, on puisse effectuer des identifications formelles :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}^I \arrow[d, shift right=8, "colim_I"' , "\dashv"] \arrow[d, shift left=8, "lim_I", "\dashv"'] \\ & \mathcal{E} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{E}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{E} \arrow[d, shift right=8, "+"' , "\dashv"] \arrow[d, shift left=8, "\times", "\dashv"'] \\ & \mathcal{E} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{E} \arrow[d, shift right=8, "\exists"' , "\dashv"] \arrow[d, shift left=8, "\forall", "\dashv"'] \\ & \mathcal{B} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dans les trois diagrammes ci-dessus la flèche verticale ascendante située au centre correspond au foncteur diagonal Δ ; ils peuvent encore se lire :

$\exists \dashv i_d \dashv \forall \qquad (\mathrm{colim} \dashv id \dashv lim)$ ou encore $(dom \dashv id \dashv cod)$

Il en résulte que la double égalité définitoire de ζ possède une signification profonde de nature catégorique. Il est donc pertinent d'en explorer les implications formelles.

6.3. *Vers une interpolation logique*

Il est possible de lire cette double égalité définissant la fonction , en identifiant le symbole de sommation (Σ) avec le connecteur booléen OU et le symbole de produit (Π) avec le connecteur booléen ET, soit encore respectivement avec les connecteurs logiques [GA05] existentiel et universel ; alors la double égalité définitoire s'explicite : il existe un entier n donné sous la forme n^{-s}, à gauche, et il existe un collectif infini constitué par une certaine puissance p^{-ms} avec m entier pour tous les entiers premiers p. Si nous ne tenons pas compte de la présence de cette variable à valeur complexe « s » qui apparaît comme exposant, cela peut encore se déchiffrer comme la donnée de l'entier n à gauche, et un produit $\prod_{p\in\wp} p^{m_p}$. Il s'agit par conséquent de l'énoncé de la propriété fondamentale de factorisation de l'arithmétique, dès lors que l'on assimile la grandeur $\zeta(s)$ à un substitut du prédicat égalité.

La considération de la double identité précédente peut être lue de plusieurs manières emportant des conséquences majeures. Les deux opérateurs de sommation (Σ) et de produit (Π) peuvent être remplacées par d'autres opérateurs qui répondent au même schéma structurel de nature catégorique. Ces deux opérateurs peuvent être lus comme, respectivement, les deux connecteurs booléens OU (encore noté $\vee$) et ET (encore noté $\wedge$), mais également les deux quantificateurs logiques $\exists$ (quantificateur existentiel) et $\forall$ (quantificateur universel).

La substitution des quantificateurs logiques aux opérateurs de somme et de produit débouche sur une interprétation de la fonction ζ comme interpolation logique. Par ailleurs la présence de l'opérateur de produit, identifié au quantificateur universel induit une propriété de compacité, qui peut être examinée de deux manières différentes, soit en raisonnant sur une topologie adaptée à la manipulation de la logique des prédicats, soit en exploitant le rôle particulier du produit en topologie. De plus, la présence du quantificateur $\forall$ débouche sur une nouvelle compréhension de la quantité comme filtre, ce qui est cohérent avec la propriété de compacité ainsi dégagée.

Il existe une autre lecture de ζ comme empilement de copies de $\mathbb{N}$ qui introduit naturellement l'espace des ordinaux, comme cela a été souligné dans le paragraphe 5.

6.5. *Compactification et continuité*

Le fait que la fonction ζ s'intercale formellement entre les deux quantificateurs existentiel et universel induit une conséquence notable d'un point de vue topologique, à savoir l'introduction de la propriété de compacité. Pour ce faire, il est nécessaire de choisir une topologie adaptée au contexte sous-jacent de la logique des prédicats. Il s'agit de la topologie de Scott adaptée pour étudier le calcul formel à base d'algorithmes en cernant les conditions qui permettent de conclure un calcul en temps fini, mais éventuellement grand. Dans ce cadre, le quantificateur $\exists$ est toujours continu ; cette propriété traduit le fait que pour constater qu'une certaine propriété est vérifiée par une liste d'éléments , il suffit de les inspecter un à un et d'arrêter l'examen dès qu'un élément satisfaisant la propriété est rencontré de telle sorte que la vérification existentielle est toujours réalisable en temps fini (explorer une liste consiste à parcourir l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, vérifier qu'au moins un entier satisfait telle propriété est toujours faisable même si cela peut exiger pratiquement une durée de calcul très longue); en revanche il n'en va pas de même avec le quantificateur universel puisque, par nature, il est nécessaire de parcourir la totalité de la liste (formellement cela exige de parcourir $\mathbb{N}$ globalement, autrement dit à aller jusqu'à l'infini). Ce dernier fait se traduit dans la topologie de Scott par l'absence de continuité du quantificateur $\forall$; pour le rendre continu, il faut disposer d'une procédure ramenant la liste ou l'espace potentiellement infini en un ensemble fini permettant de conclure en temps fini. Tout procédé de nature topologique qui réduit l'infini au fini consiste à introduire la propriété de compacité. Maintenant, puisque ζ relie les deux quantificateurs, dont le premier est toujours continu alors que le second ne l'est que sous condition de compacité et en admettant que le formalisme décrit s'inscrive dans un contexte topologique approprié, il apparaît souhaitable, voire indispensable d'appréhender ζ comme réalisant une procédure de compactification. La suite de l'exposé s'emploie à mettre en évidence que tel est bien le rôle tenu par cette fonction. Il est pertinent de lire le principe fondamental d'induction à la lumière de la compacité ; si nous disposons d'une propriété P applicable à l'ensemble des entiers grâce au principe d'induction, celle-ci définit un ouvert qui recouvre $\mathbb{N}$ tout entier, ce qui en fait un ensemble compact. Pour la topologie de Scott $\mathbb{N}$ est un compact. Par ailleurs on peut assimiler tout objet constructible de manière algorithmique de manière à en faire un objet auto-similaire comme étant un ensemble compact puisqu'il s'agit de répliquer un certain patron – pattern en anglais – supposé constructible en un nombre fini d'étapes de calcul grâce à un processus d'induction qui revient à le répliquer à diverses échelles une quantité infinie dénombrable de fois.

7. la fonction zêta comme interpolateur logique :

A ce stade d'exposition, nous examinons brièvement deux conséquences importantes résultant de cette lecture catégorique. Premièrement, la double égalité définitoire se présente de manière très ramassée sous la forme :

$$\alpha(n,s) \vdash \zeta(s) \vdash \gamma(s,p)$$

avec trois termes enchaînés qui sont formellement assimilables à des prédicats, le premier débutant avec le quantificateur existentiel $\exists$, le troisième avec le quantificateur universel $\forall$, un nouveau symbole est intercalé entre eux, qui représente l'implication logique faisant fonction d'adjonction. Il est important de noter le mécanisme de substitution des variables, respectivement n, s et p. Une concaténation de prédicats de cette nature fait l'objet d'un théorème important de la logique des prédicats démontré en 1957 par Craig [GA05]. Ce même résultat fut plus récemment reformulé et généralisé dans le cadre catégorique par Pitts en 1988 [PI83]. Notre propos n'est pas de rentrer dans les justifications détaillées de ces deux théorèmes importants ; il est néanmoins utile d'en expliquer le fondement, puisque la fonction ζ y est directement rattachée. Selon une observation capitale de Lawvere, les deux quantificateurs, existentiel et universel, sont adjoints (au sens de la théorie des catégories) de l'opération de substitution de variables ; ce fait est explicité par les deux équivalences suivantes :

$$\varphi(y) \vdash \forall z.\ \psi(z,y) \Leftrightarrow \varphi(\text{"z"},y) \vdash \psi(z,y)$$

$$\exists z.\ \psi(z,y) \vdash \varphi(y) \Leftrightarrow \psi(z,y) \vdash \varphi(\text{"z"},y)$$

« z » signifie que la variable z apparait dans le prédicat comme variable « muette ». Si nous nous plaçons dans le cadre d'une logique admettant l'égalité, les équivalences précédentes prennent la forme suivante :

$$\varphi(y) \vdash \forall x. u(x) \equiv y \rightarrow \gamma(x) \Leftrightarrow \varphi(\mathrm{u}(\mathrm{x})) \vdash \gamma(x)$$

$$\exists x. u(x) \equiv y \wedge \gamma(x) \vdash \varphi(y) \Leftrightarrow \gamma(x) \vdash \varphi(u(x))$$

Il est alors utile d'introduire des prédicats intermédiaires qui permettent ensuite de réécrire les deux équivalences d'une manière concentrée : en introduisant les notations

$$u!\,(\gamma(x)) = \exists x. u(x) \equiv y \wedge \gamma(x)$$

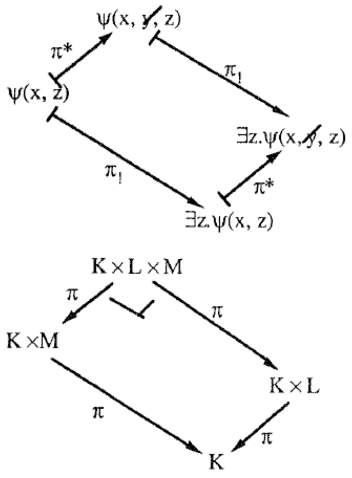
$$u_*(\gamma(x)) = \forall x. u(x) \equiv y \rightarrow \gamma(x)$$

Il vient :

$$\varphi(y) \vdash u_*(\gamma(x))\,) \Leftrightarrow \varphi(u(x)) \vdash \gamma(x)$$

$$u!\,(\gamma(x)) \vdash \varphi(y) \Leftrightarrow \gamma(x) \vdash \varphi(u(x))$$

Ces deux dernières trouvent une interprétation comme procédé de changement de variables entre différents espaces produits :



L’exemple canonique de catégorie fibrée est : Cod : ${}^{\mathcal{E}ns}/_{\mathcal{E}ns} \to \mathcal{E}ns$. Grâce à la construction de Grothendieck, on peut représenter la fibre $\left({}^{\mathcal{E}ns}/_{\mathcal{E}ns}\right)_I = {}^{\mathcal{E}ns}/_I$ comme la catégorie $\mathcal{E}ns^I$ des ensembles I-indicés, la structure horizontale au-dessus d’une fonction u ∊ $\mathcal{E}ns$(I,J)

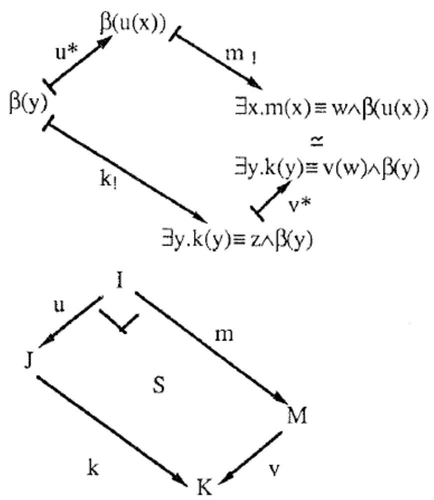
S’explicite en :

$u^* : \mathcal{E}ns^J \to \mathcal{E}ns^I : \{\varphi_y \mid y \in J\} \mapsto \{\varphi_{u(x)} \mid x \in I\}$

$u_! : \mathcal{E}ns^I \to \mathcal{E}ns^J : \{\gamma_x \mid x \in I\} \mapsto \{\sum_{x \in u^{-1}(y)} \gamma_x \mid y \in J\}$

$u_* : \mathcal{E}ns^I \to \mathcal{E}ns^J : \{\gamma_x \mid x \in I\} \mapsto \{\prod_{x \in u^{-1}(y)} \gamma_x \mid y \in J\}$

La cohérence qui se manifeste par la possibilité d’emprunter les deux chemins possibles grâce à la concaténation des flèches en partant d’un même point, en l’occurrence $\psi(x,z)$, en aboutissant à la même valeur terminale, est garantie dans le cas général pour une condition connue dans la littérature sous le vocable de condition de Beck-Chevalley qui s’exprime synthétiquement par l’égalité fonctionnelle mentionnée à droite dans la figure ci-dessous :



Avec la condition $m_! \circ u^* \cong v^* k_!$ qui exprime exactement la condition de Beck-Chevalley. Dans le cas d’espèce, la satisfaction du critère de Beck-Chevalley est due au fait que la fonction ζ admet une interprétation géométrique comme structure fibrée plate.

Derrière le formalisme qui paraît de prime abord abscons, se cache le concept logique d’indépendance des variables qui s’énonce : toute variable dans un calcul est invariante sous l’effet d’une quantification portant sur d’autres variables. En d’autres termes, les différentes variables, dès lors qu’elles sont bien choisies indépendantes les unes par rapport aux autres, n’interfèrent donc pas entre elles dans une démonstration, qui est une concaténation d'implications logiques. Ainsi dans l'implication $\alpha(x,y) \vdash \gamma(y,z)$, la variable x ne tient aucun rôle dans la démonstration de $\gamma(y,z)$, de même z pour la démonstration de $\alpha(x,y)$; il en résulte qu'il existe un prédicat intermédiaire ne comportant que la seule variable commune aux deux autres prédicats, à savoir y, noté $\beta(y)$ et dénommé interpolant de telle sorte que :

$$\alpha(x,y) \vdash \beta(y) \vdash \gamma(y,z)$$

Nous venons de formuler le contenu du théorème de Craig. Nous constatons que tel est le rôle tenu par la grandeur $\zeta(s)$. Nous interprétons ce résultat en disant que la fonction ζ fait office de prédicat interpolant entre les deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$ en remplaçant le foncteur diagonal Δ qui représente le prédicat d'égalité. Par conséquent, la fonction ζ peut être appréhendée comme une généralisation de l'identité. Ce fait ouvre d'intéressantes perspectives en termes de logiques généralisées de type logiques floues [GA05].

Une remarque mérite d'être relevée à l'issue de cette analyse se référant à la théorie de la logique des prédicats. La variable s, usuellement considérée comme évoluant dans un domaine généralement compact du plan complexe, tient ici un rôle de pure variable formelle sans se rapporter à une quelconque structure de nature soit topologique, soit algébrique. Nous verrons ultérieurement que ce fait se manifeste de nouveau si on modifie le cadre théorique d'analyse ; il apparaît approprié de modifier le type de la variable s pour comprendre la nature de la fonction ζ.

8. Incompatibilité structurelle entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ et introduction de $\mathbb{C}$:

Classiquement $(\mathbb{N},+,\times)$ est un demi-anneau qui est prolongé en anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ par construction de classes d'équivalence à la Grothendieck ; à son tour cet anneau est étendu en corps $(\mathbb{Q},+,\times)$ par calcul de fractions. Il convient de noter que l'introduction du corps des rationnels peut être appréhendé intuitivement par changements d'échelles multiples paramétrés par les entiers naturels. A son tour $\mathbb{Q}$ est prolongé en $\mathbb{R}$, le corps des réels, caractérisé comme corps complet au regard du critère de Cauchy ; le corps des réels étant usuellement construit par le procédé des coupures de Dedekind. Ainsi ce dernier passage est de nature topologique et non plus algébrique comme les deux constructions précédentes. Le corps des réels est lui-même prolongé en $\mathbb{C}$, corps des complexes. Ce dernier corps est algébriquement clos au sens où tout polynôme à coefficients complexes admet toujours un zéro complexe. L'exigence de clôture algébrique peut sembler de nature strictement algébrique ; mais sa démonstration exige toujours le recours à des propriétés de nature topologique. La première démonstration du théorème dit théorème fondamental de l'algèbre, dû à Gauss, s'appuie sur un résultat important de topologie établi une première fois par Bolzano, le théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction continue. Il est pertinent de relever que ce dernier théorème repose essentiellement sur les deux notions de compacité et de connexité, ce sur quoi nous reviendrons ultérieurement. En particulier, la compacité est mobilisée, ce qui illustre le résultat général déjà mentionné selon lequel la compacité fait la jonction entre les structures algébriques et les structures topologiques.

Nous revenons sur l'incompatibilité déjà mentionnée à la fin du paragraphe 2 entre les deux structures $(\mathbb{N},\div)$ et $(\mathbb{R},\leq)$ où $\div$ désigne la relation d'ordre partiel de divisibilité. Cela est explicable de plusieurs manières. Sous un premier angle de vue, la structure arithmétique de $\mathbb{N}$ repose sur l'opérateur successeur. Considérons alors deux entiers a et b où b est le successeur immédiat de a, dans le corps $\mathbb{R}$, dans le corps des réels on peut toujours intercaler le nombre $\frac{a+b}{2}$ entre a et b de telle sorte que la notion de successeur immédiat disparaît. Sous un second angle de vue, $\mathbb{N}$ est un espace topologique non connexe alors que $\mathbb{R}$ l'est, par conséquent le modèle de Peano ne peut pas être plongé par une fonction continue dans le corps des réels puisque la connexité est préservée par continuité. Enfin, d'un troisième point de vue, déjà abordé dans le deuxième paragraphe, la relation de divisibilité introduit une distinction entre entiers premiers et ceux qui ne le sont pas, les premiers sont uniquement source des flèches représentant la relation de divisibilité alors que les autres entiers peuvent être à la fois source et puits des flèches, de plus seuls les entiers premiers sont mis en relation biunivoque avec des ouverts irréversibles ; en revanche dans $(\mathbb{R}, \leq)$ muni de la topologie naturelle, tous les points sont en correspondance biunivoque avec l'ouvert irréductible, complémentaire de l'adhérence de chaque point si bien que tous les points sont homogènes pour la relation d'ordre. Il est en revanche possible de rendre compatible les deux structures de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{C}$. Ce fait explique que la fonction ζ avec l'argument s variant dans un domaine du plan complexe s'est révélée extrêmement utile pour étudier finement certaines propriétés arithmétiques, ce qui est impossible si on limite le domaine de variation de la variable s à un domaine de la droite réelle.

9. Conclusion et introduction de la partie 2

Comme l'affirme E. Poe dans les histoires extraordinaires « *peut être le mystère est-il trop clair* » ; ici le mystère est si simple que les fondements de l'universalité de la fonction zêta de Riemann [KA92] et des certaines de ses propriétés essentielles nous échappent par trop de clarté. Sans doute en parallèle, l'ambigüité évoquée par Poincaré et rappelée dans l'introduction, est-elle à l'origine de l'échec des mathématiciens face au traitement de ce que l'on nomme usuellement l'Hypothèse de Riemann. Comme chacun l'aura constaté la présente note n'a pas pour objet de mener quelques calculs que ce soient mais de tenter de comprendre le statut transdisciplinaire de la fonction zêta en mathématiques. Pour des raisons indiquées synthétiquement la fonction zêta fournit à la pensée rationnelle le concept et la méthode sans doute parmi les plus importants de l'histoire passée des sciences mathématiques. Puisqu'il s'agit toujours de compter et de mesurer résumons la démarche que nous allons détailler plus avant : La fonction zêta est attachée à l'arithmétique de Peano appliquée au demi anneau des entiers. Elle fait le lien avec la topologie en structurant au travers d'une multiplicité feuilletée un système canonique et ordonné de voisinages. Les propriétés de zêta sont explicitées et justifiées par la théorie des catégories par le truchement des opérateurs d'adjonction, de diagramme cartésien et de structure monadique. Les notions d'idéal, de filtre et d'ultrafiltre formalisent la décomposition des morphismes dont la fonction devient alors le véhicule naturel. La construction de comme co-noyau introduit le concept de colimite, et de limite par dualité, et aussi bien que le concept d'infinitésimal. Enfin l'universalisation apparait évidente dès lors qu'on comprend pourquoi la fonction zêta constitue l'interpolation canonique entre le quantificateur Existentiel (il existe) et le quantificateur Universel (quel que soit) de telle sorte qu'elle introduit implicitement une généralisation de la logique des prédicats.

La contribution suivante aura pour objet d'expliquer de quelle manière est contrôlé le passage au cardinal du continu et quel en est la conséquence fonctionnelle pour la fonction elle-même.

Bibliographie

[CNM23] Chollat-Nami Mrie et Longo Guiseppe, Entropie, *Négentropie et anti-entropie, Le jeu des tensions pour penser le vivant*, Lîla-Entropy Project Entropie Vol1 (2023)

[GA05] D. Gabbay, L. Maksimova: *Interpolation and definability - modal and intuitionistic logics*, Oxford logic guides 2005

[JA99] B. Jacobs : *Categorical Logic and Type Theory*, North Holland 1999

[KA92] A.A. Karatsuba, S. Voronin: *The Riemann Zeta Function*, Walter de Gruyter 1992

[LA10] W. Lawvere, M. Menni: *The Hopf algebra of Möbius intervals* Theory and Applications of Categories 24-10 (2010) 221-265

[LE14] T. Leinster : *Basic category theory*, Cambridge 2014

[PI83] A.M. Pitts : *Amalgamation and interpolation in the category of Heyting algebras*, J. Pure Appl. Algebra 29 -2 (1983) 155-165

[RO64] G. C. Rota: *Foundations of combinatorial theory* I Z. Wahrscheinlichkeit theo. Verwandte Geb. Z. (1964)

Annexe: : Fonctions ζ et μ (Möbius) dans une catégorie

Dans cette partie nous rappelons l'approche initialement formulée par G.-C. Rota en 1966. C'est précisément en organisant un calcul sur les flèches pour rendre compte des modalités de composition, et de décomposition en sens inverse, de celles-ci que sont construites les fonctions zêta et de Möbius.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie, notons $\mathcal{A}_0$ son ensemble d'objets et $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des morphismes dans $\mathcal{A}$. Cette catégorie est dite finiment finie si pour toute flèche f: a → b dans $\mathcal{A}$, il n'existe qu'un nombre fini de diagrammes a $\xrightarrow{g}$ c $\xrightarrow{h}$ b dans $\mathcal{A}$ dont la composition vaut f [PI83]. On définit alors l'algèbre d'incidence finie, notée k$\mathcal{A}$, comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{A}_1 \rightarrow$ k, qui est transformée en k – algèbre où k est un semi-anneau (structure d'anneau en l'absence éventuelle de négatifs). La structure de k – module est définie de manière ponctuelle. La multiplication $*$ est définie par la loi de convolution:

$\alpha * \beta\ (f) = \sum_{hg=f} \alpha\ (g)\beta(h)$ avec $\alpha, \beta \in$ k$\mathcal{A}$, f $\in \mathcal{A}_1$

L'unité multiplicative est par définition δ où :

$\delta\ (1_a) = 1\ \forall$ a $\in \mathcal{A}$ et $\delta\ (f) = 0$ sinon.

La fonction $\zeta_{\mathcal{A}}$ est alors définie par $\zeta_{\mathcal{A}}(f) = 1\ \forall\ f \in \mathcal{A}_1$. L'inverse de Möbius sur k est défini si $\zeta_{\mathcal{A}}$ admet un inverse multiplicatif ; alors $\mu_{\mathcal{A}} = {\zeta_{\mathcal{A}}}^{-1} \in$ k$\mathcal{A}$.

Prenons l'exemple de $\mathcal{A}$ « poset » (« partially ordred set » en anglais contracté) ; alors $\mathcal{A}$ en tant que catégorie est finiment finie si $\mathcal{A}$ est localement fini en tant qu'ensemble partiellement ordonné, à savoir que : $\forall$ a, b $\in \mathcal{A}$ $\{c \in \mathcal{A}; a\ \leq c \leq b\}$ est fini. L'algèbre d'incidence est ainsi l'ensemble des fonctions $\{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; a \leq b\} \rightarrow$ k. La fonction de Möbius se caractérise par :

$$\sum_{c:a\leq c\leq b} \mu_{\mathcal{A}}\ (a,c) = \sum_{c:a\leq c\leq b} \mu_{\mathcal{A}}\ (c,b) = \begin{cases} 1\ si\ a = b \\ 0\ sinon \end{cases}$$

Quand k est un anneau, la fonction de Möbius existe et est donnée par :

$\mu_{\mathcal{A}}$(a,b) = $\sum_{n\ \in \mathbb{N}} (-1)^n$ cardinal $\{cha\hat{\imath}ne\ a = a_0\ < \cdots <\ a_n = b\}$

Cas particulier : $\mathbb{N}$ vu comme ensemble partiellement ordonné pour la relation de divisibilité et k = $\mathbb{Z}$. Alors on a $\mu_{\mathbb{N}}$(a,b) = $\mu\ ({}^{b}/_{a})$ où μ est la fonction de Möbius classique. Il en résulte que la fonction ζ classique est obtenue, mais en limitant ses valeurs à l'anneau $\mathbb{Z}$. $\mathbb{N}$, en tant qu'ensemble partiellement ordonné par la divisibilité, est appréhendé comme catégorie enrichie et donc en fait comme espace métrique généralisé au sens donné précédemment. La fonction ζ consiste à fixer la même distance valant 1 à toutes les flèches.

Arrivé à ce stade de l'introduction des fonctions ζ et de Möbius μ il est pertinent de faire quelques commentaires. La fonction δ, qui a été introduite comme unité pour l'algèbre de convolution, répond exactement au concept d'identité stricte, ou de localisation, en rendant compte de manière fonctionnelle de l'égalité entre objets x = y. La fonction ζ lui est substituée qui prend la valeur 1 pour un couple d'objets (x,y) si et seulement si x $\leq$ y, ce que l'on peut représenter dans le contexte catégorique encore par x $\longrightarrow$ y. Il s'agit donc d'un procédé de « catégorification » par lequel on remplace les identités strictes par des flèches. Une autre manière d'interpréter ce remplacement de l'identité par l'inégalité ou la flèche consiste à y voir la substitution des points par les chemins admissibles, soit partant d'un objet donné, soit arrivant en un objet donné.

