

Quelques propriétés analytiques des moyennes mobiles, et leur application à la détection de tendances dans un signal

Some analytical properties of moving averages. Application to the detection of trends in a signal

Jacques Padet¹

¹ ITheMM-Thermique, Faculté des Sciences, Université de Reims, France, jacques.padet@univ-reims.fr

RÉSUMÉ. L'analyse de processus très irréguliers s'appuie souvent sur la recherche d'une tendance, courbe moyenne représentant l'allure générale du phénomène observé. Si l'être humain est plus ou moins capable de tracer une telle courbe à main levée, de façon intuitive, sa détermination objective est très délicate. La méthode des moyennes mobiles étant l'une des plus utilisées dans la recherche de tendances, on se propose ici d'étudier quelques propriétés de ces moyennes mobiles (essentiellement moyenne et variance). On montre alors qu'elles peuvent servir de support à la détection de fenêtres d'observation caractéristiques, conduisant à des tendances structurelles du signal analysé. La notion de tau-moyenne (tendance obtenue par une moyenne mobile à fenêtre variable) est également réexaminée. Enfin, en annexe, on présente le détail de la procédure de calcul.

ABSTRACT. The analysis of very irregular processes is often based on the search for a trend, an average curve representing the general course of the observed phenomenon. If each people is more or less capable of drawing such a curve freehand, in an intuitive way, its objective determination is very delicate. The method of moving averages being one of the most used in the search for trends, we propose here to study some properties of these moving averages (essentially mean and variance, or standard deviation). We then show that they can be used to detect characteristic observation windows, leading to structural trends of the analyzed signal. The notion of tau-average (trend obtained by a moving average with a variable window) is also re-examined.

MOTS-CLÉS. Tendances, Analyse de données, Echelles d'observation, Echelles de turbulence, Sensibilité d'un système d'observation, Modélisation multi-échelles, Moyennes mobiles, Variance.

KEYWORDS. Trends, Data analysis, Observation scales, Turbulence scales, Sensitivity of an observation system, Multi-scale modelling, Moving averages, Variance.

Nomenclature

$f(x)$	fonction dont on recherche la tendance, ou les tendances
$f(x_{1-})$	prolongement de $f(x)$ à gauche de x_1
$f(x_{2+})$	prolongement de $f(x)$ à droite de x_2
$\hat{f}(x, \tau)$	moyenne mobile de $f(x)$
$f_j(x)$	composante de $f(x)$
$\hat{f}_j(x, \tau)$	moyenne mobile de la composante j
$\varphi_j(x)$	composante fluctuante, de moyenne nulle
$\hat{\varphi}_j(x, \tau)$	moyenne mobile d'une composante fluctuante
MM	moyenne mobile (abréviation)
$M(\tau)$	moyenne de $\hat{f}(x, \tau)$
M_0	moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$
$\sigma^2(\tau)$	variance de la MM relative à τ
τ	demi-fenêtre d'observation
τ_n	demi-fenêtre d'observation significative d'ordre n

$T_n(x)$	tendance relative à τ_n
x_1, x_2	bornes de l'intervalle d'étude

1. Introduction

L'idée directrice à l'origine de cette étude était l'analyse de grandeurs turbulentes en régime variable, c'est-à-dire quand les conditions aux limites dépendent du temps : comment extraire d'un signal turbulent les effets spécifiques du régime variable ? Cet objectif n'a pas pu être poursuivi, mais il reste d'actualité. Par contre, le champ de la recherche a été étendu à de nombreux autres domaines.

1.1. La notion de tendance

Tendance et modèle

Pour le physicien, la modélisation fait appel d'une part à un *modèle de connaissance* (relation mathématique établie par raisonnements successifs à partir de lois physiques élémentaires), et d'autre part à un *modèle de comportement* (obtenu à partir de résultats expérimentaux). Le problème est alors d'ajuster les deux modèles, en minimisant leur écart.

Une démarche scientifique implique que cet ajustement se fasse de façon *objective*, indépendamment de l'observateur. Mais, pour beaucoup de phénomènes évoluant de manière très irrégulière, voire chaotique, le nombre de paramètres susceptibles de les expliquer est trop grand, et il devient impossible d'élaborer un modèle de connaissance. L'expérimentateur rencontre alors des difficultés pour interpréter les résultats de ses mesures.

Au modèle de connaissance peut se substituer, dans un premier temps, la notion de *tendance*. Celle-ci constitue une relation déterministe $y = F(x)$ entre deux variables x et y , mais la forme mathématique de la fonction F nous est inconnue. Son objet est de remplacer les N échantillons d'une série de mesures par N éléments traduisant une évolution structurelle fondamentale du phénomène étudié. Une fois déterminés, ces éléments, constituant la tendance, serviront à l'élaboration d'un modèle de connaissance, plus simple, qui contient *l'information utile* disponible.

A l'origine du concept de tendance, se trouvent en particulier la météorologie et l'économie. Les spécialistes de ces disciplines, souhaitant exploiter les valeurs d'une série d'observations (série temporelle, ou chronologique [GOU 95]), se trouvaient confrontés au problème posé par des fluctuations plus ou moins aléatoires. La présence de ces fluctuations et l'impossibilité d'établir un modèle déterministe entravaient leur objectif principal, à savoir la **prédiction**. Mais la recherche de tendances s'appuie aussi sur des besoins plus profonds et s'étend à des domaines d'application très variés.

Tendances, composantes et lissage

Une certaine confusion règne dans la terminologie, et il est important de préciser d'abord le sens des mots qui seront utilisés.

Une fonction $f(x)$, ensemble de résultats d'observation, peut être la somme de plusieurs fonctions $f_j(x)$ qui en sont les **composantes**. Pour beaucoup d'auteurs, ces composantes sont considérées comme des tendances du phénomène global décrit par $f(x)$. Recherche de tendances et extraction de composantes seraient alors équivalentes.

Cette approche semble trop réductrice, car la notion de **tendance** a une signification plus profonde. Elle correspond à des évolutions structurelles des phénomènes complexes, qui en sont aussi des aspects simplifiés, mais non additifs. Autrement dit, $f(x)$ n'est pas obligatoirement la somme de ses tendances, qui seront désignées par $T_n(x)$. En outre, s'il existe des composantes *stricto sensu*, elles peuvent avoir elles-mêmes leurs propres tendances. Il est donc important de déconnecter composantes et tendances.

Pour avoir un sens structurel, le nombre N_T de tendances $T_n(x)$ doit forcément être limité ($n \in [1, N_T]$). Dans ce contexte, le lissage d'une courbe, très utilisé dans toutes les disciplines, se traduit par l'obtention d'une **tendance primaire** $T_1(x)$ où la fonction est débarrassée de diverses scories accidentelles ou aléatoires. A l'opposé, ce que l'on appelle communément la **tendance de fond** (ou *tendance ultime* [ROC 95, ROC 96]) est alors la dernière tendance significative $T_{NT}(x)$. Celles qui sont éventuellement détectées entre les deux sont des *tendances partielles*.

1.2. Moyennes mobiles

Problématique

L'une des techniques les plus utilisées pour détecter des tendances est la méthode des moyennes mobiles [GOD 17]. Elle consiste à remplacer $f(x)$, en chaque point, par sa moyenne sur un intervalle $[x - \tau_1, x + \tau_2]$. Assez généralement, l'intervalle est symétrique par rapport à x et indépendant de x , c'est-à-dire que $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ *cte*. On parle alors d'une *moyenne mobile centrée à fenêtre constante*.

Les moyennes mobiles rendent beaucoup de services, particulièrement dans le lissage, mais leur efficacité reste limitée pour plusieurs raisons :

- la principale est la difficulté à établir des critères objectifs pour sélectionner les valeurs de τ conduisant à des tendances représentatives (structurelles) de la fonction analysée (les moyennes mobiles ne sont pas toutes des tendances, loin de là ...). Plusieurs méthodes ont été proposées, basées sur des propriétés topologiques du signal (inconstance, sinuosité, indice de non-linéarité) [PAD 94, PAD 93, ROC 91, ROC 92, PAD 96]. Elles donnent des résultats intéressants, mais souffrent d'une certaine faiblesse dans leurs fondements théoriques.

- le domaine de définition $[x_1, x_2]$ de $f(x)$ étant borné, l'application de la méthode au voisinage des bornes pose un problème, quand l'intervalle de calcul $[x - \tau, x + \tau]$ vient buter à gauche sur x_1 ou à droite sur x_2 (notons que la zone concernée est de largeur τ). On doit alors, soit réduire τ dans ce voisinage, soit accepter un intervalle dissymétrique, soit prolonger la fonction au-delà des bornes, mais comment ?

- une autre difficulté est que l'intervalle de calcul est constant sur l'ensemble du domaine de définition. On peut se demander si cette contrainte ne dissimule pas certaines évolutions, parce qu'elle est trop globale. Une tentative de réponse a été apportée par une méthode auto-adaptative, appelée τ - *moyenne*, basée sur un intervalle variable $\tau(x)$ qui s'ajuste localement à la structure du signal [GOU 95, PAD 86, PAD 87]. Néanmoins, avec cette technique, les deux premières difficultés n'étaient pas totalement résolues. Elle sera réexaminée ci-dessous au paragraphe 9.

Moyennes mobiles et observation

Mathématiquement, les tendances de $f(x)$ obtenues par des moyennes mobiles peuvent être considérées comme une *classe d'approximations* de la fonction, la valeur de τ représentant le degré d'approximation correspondant [PAD 87].

Physiquement, une moyenne mobile est le résultat d'une observation de $f(x)$ par un système d'acquisition (appareillage expérimental, ou tout autre moyen) de sensibilité limitée. L'intervalle 2τ , qui est la *fenêtre d'observation*, constitue aussi la *limite de sensibilité* du système. Les valeurs de la fonction ne peuvent être observées individuellement, mais sont noyées dans un halo qui englobe toutes les valeurs incluses dans l'intervalle [PAD 77]. *Dans ce contexte, une tendance est le résultat d'une observation par un appareillage adapté à un aspect particulier de l'objet observé.*

Plus fondamentalement, si leurs critères de caractérisation sont adéquats, certaines fenêtres d'observation pourraient être interprétées comme des *échelles caractéristiques* de $f(x)$ [ROC 96], et

fournir ainsi une aide à la modélisation (les échelles de turbulence en seraient un exemple intéressant). En particulier, leur détection constituerait une assistance dans les approches multi-échelles, qui sont de plus en plus considérées dans de nombreux domaines en mécanique et en physique.

Le présent article est une contribution à la détection de ces échelles, basée sur des propriétés fonctionnelles des moyennes mobiles.

2. Définitions

Soit $f(x)$ une fonction à valeurs réelles d'une variable réelle x , dérivable et intégrable par morceaux. Soit τ une constante positive.

On réalise une approximation de $f(x)$ sur un segment $[x_1, x_2]$ au moyen d'une fenêtre d'observation de largeur 2τ par l'application suivante :

Moyenne mobile de $f(x)$ centrée sur x (en abrégé MM) :

$$\hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \quad (1)$$

Deux autres grandeurs seront également considérées :

La moyenne de cette moyenne mobile sur l'intervalle $[x_1, x_2]$:

$$M(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \hat{f}(x, \tau) dx \quad (2)$$

La moyenne de la fonction sur l'intervalle $[x_1, x_2]$:

$$M_0 = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (3)$$

Notons dès à présent deux propriétés qui en découlent immédiatement :

si $\tau \rightarrow 0$, $\hat{f}(x, \tau) \sim \frac{1}{2\tau} 2\tau f(x)$, d'où :

$$\hat{f}(x, 0) = f(x) \quad (4a)$$

$$M(\tau = 0) = M_0 \quad (4b)$$

3. Propriétés fonctionnelles de $\hat{f}(x, \tau)$ et de $M(\tau)$

3.1. Dérivée de \hat{f} par rapport à x

Soit Δx une petite variation de x . D'après (1), la variation correspondante de \hat{f} est :

$$\hat{f}(x + \Delta x, \tau) - \hat{f}(x, \tau) = \Delta \hat{f} = \frac{1}{2\tau} \left\{ \int_{x+\Delta x-\tau}^{x+\Delta x+\tau} f(v) dv - \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \right\} \quad (5)$$

En décomposant la première intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f} &= \frac{1}{2\tau} \left\{ \int_{x+\Delta x-\tau}^{x-\tau} f(v) dv + \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv + \int_{x+\tau}^{x+\Delta x+\tau} f(v) dv - \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \right\} \\ \Delta \hat{f} &= \frac{1}{2\tau} \left\{ - \int_{x-\tau}^{x+\Delta x-\tau} f(v) dv + \int_{x+\tau}^{x+\Delta x+\tau} f(v) dv \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Puisque Δx est petit, on peut écrire :

$$\Delta \hat{f} \sim \frac{1}{2\tau} \{- \Delta x f(x - \tau) + \Delta x f(x + \tau)\}$$

Par un passage à la limite $\Delta x \rightarrow 0$, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \{f(x + \tau) - f(x - \tau)\}} \quad (7)$$

On voit sur cette expression que, s'il existe des abscisses x_m pour lesquelles $f(x_m + \tau) = f(x_m - \tau)$, elles correspondent à des extrêma de la moyenne mobile. Lorsque, en outre, pour les mêmes abscisses, on a $\partial f(x + \tau) / \partial x = \partial f(x - \tau) / \partial x$, alors $\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} = 0$. La MM présente en x_m un point d'inflexion à tangente horizontale. Ceci peut se produire si $f(x)$ possède localement des propriétés de symétrie.

3.2. Dérivée de \hat{f} par rapport à τ

Considérons à nouveau (1), et soit $\Delta\tau$ une petite variation de τ . La variation correspondante de \hat{f} est :

$$\hat{f}(x, \tau + \Delta\tau) - \hat{f}(x, \tau) = \Delta\hat{f} = \frac{1}{2\tau + 2\Delta\tau} \int_{x-\tau-\Delta\tau}^{x+\tau+\Delta\tau} f(v) dv - \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \quad (8)$$

$$\Delta\hat{f} = \frac{1}{2\tau + 2\Delta\tau} \left\{ \int_{x-\tau-\Delta\tau}^{x-\tau} f(v) dv + \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv + \int_{x+\tau}^{x+\tau+\Delta\tau} f(v) dv \right\} - \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \quad (9)$$

Un développement au premier ordre donne :

$$\Delta\hat{f} \sim \frac{1}{2\tau} \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\tau}\right) \left\{ \Delta\tau f(x - \tau) + \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv + \Delta\tau f(x + \tau) \right\} - \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \quad (10)$$

soit, après regroupement des termes :

$$\Delta\hat{f} \sim \frac{\Delta\tau}{2\tau} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} - \frac{\Delta\tau}{2\tau^2} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv - O(\Delta\tau^2)$$

Par passage à la limite $\Delta\tau \rightarrow 0$, compte tenu de (1), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} - \frac{1}{\tau} \hat{f}(x, \tau)} \quad (11)$$

3.3. Dérivée de $M(\tau)$

Dérivons la formule (2) :

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{d}{d\tau} \int_{x_1}^{x_2} \hat{f}(x, \tau) dx \quad (12)$$

Les bornes de l'intégrale ne dépendent pas de τ ; on a donc le droit de dériver sous le signe somme :

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \tau}(x, \tau) dx \quad (13)$$

La dérivée de \hat{f} est donnée par (11) :

$$\begin{aligned} \frac{dM(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2\tau} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} - \frac{1}{\tau} \hat{f}(x, \tau) \right) dx \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{2\tau} \int_{x_1}^{x_2} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} dx - \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{\tau} \int_{x_1}^{x_2} \hat{f}(x, \tau) dx \end{aligned}$$

Avec (2) :

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{2\tau} \int_{x_1}^{x_2} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} dx - \frac{1}{\tau} M(\tau) \quad (14)$$

Après un changement de variable dans les deux intégrales :

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{2\tau} \left\{ \int_{x_1 - \tau}^{x_2 - \tau} f(x) dx + \int_{x_1 + \tau}^{x_2 + \tau} f(x) dx \right\} - \frac{1}{\tau} M(\tau) \quad (15)$$

On procède à la décomposition des termes entre accolades (en ne gardant que les bornes) :

$$\{ \} = \int_{x_1 - \tau}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_2 - \tau} + \int_{x_1 + \tau}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_2 + \tau}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\{ \} = 2 \int_{x_1}^{x_2} + \left\{ \int_{x_1 - \tau}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_1 + \tau} \right\} + \left\{ - \int_{x_2}^{x_2 - \tau} + \int_{x_2}^{x_2 + \tau} \right\} \quad (16)$$

Reportons dans (15). On obtient avec (3) :

$$\boxed{\frac{dM(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\tau} (M_0 - M(\tau)) + \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{2\tau} \left[\left\{ \int_{x_1 - \tau}^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_1 + \tau} f(x) dx \right\} + \left\{ - \int_{x_2}^{x_2 - \tau} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_2 + \tau} f(x) dx \right\} \right]} \quad (17)$$

Cette équation ne permet pas d'établir des propriétés générales de $M(\tau)$. Il peut exister des valeurs de τ telles que $M_0 = M(\tau)$ (conservation de la moyenne), ou telles que la dérivée soit nulle (extrêma de M). Seule la donnée de $f(x)$ permettra de le savoir.

4. Conservation de la moyenne

4.1. Prolongement au-delà des bornes

La méthode de MM centrée impose de prendre en compte $f(x)$ sur les segments $[x_1 - \tau, x_1]$ et $[x_2, x_2 + \tau]$. En conséquence, si $f(x)$ n'est pas définie en dehors de l'intervalle $[x_1, x_2]$, ou si l'on souhaite la limiter à cet intervalle, on doit la prolonger à gauche de x_1 par $f(x_{1-})$, et à droite de x_2 par $f(x_{2+})$. Ces deux prolongements sont *a priori* arbitraires, mais s'ils répondent aux conditions suivantes :

$$\int_{x_1 - \tau}^{x_1} f(x_{1-}) dx = \int_{x_1}^{x_1 + \tau} f(x) dx \quad (18a)$$

$$\int_{x_2}^{x_2 + \tau} f(x_{2+}) dx = \int_{x_2 - \tau}^{x_2} f(x) dx \quad (18b)$$

alors l'équation (17) se réduit à :

$$\boxed{\frac{dM(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\tau} (M_0 - M(\tau))} \quad (19)$$

Le plus simple est de choisir $f(x_{1-}) = cte$ et $f(x_{2+}) = cte$ (fig. 1). Ainsi, (18a) et (18b) donnent respectivement :

$$\tau f(x_{1-}) = \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(x) dx \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x_{1-}) = \frac{1}{\tau} \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(x) dx} \quad (20a)$$

$$\tau f(x_{2+}) = \int_{x_2-\tau}^{x_2} f(x) dx \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x_{2+}) = \frac{1}{\tau} \int_{x_2-\tau}^{x_2} f(x) dx} \quad (20b)$$

Regardons quelques valeurs particulières des prolongements (20) :

a) Si $\tau \rightarrow 0$

$$f(x_{1-}, \tau) \rightarrow f(x_1) \quad \text{et} \quad \hat{f}(x_1, 0) = f(x_1) \quad (21a)$$

$$f(x_{2+}, \tau) \rightarrow f(x_2) \quad \text{et} \quad \hat{f}(x_2, 0) = f(x_2) \quad (21b)$$

b) Si $\tau = x_2 - x_1 = \tau_{12}$

$$f(x_{1-}, \tau_{12}) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = M_0 \quad (21c)$$

$$f(x_{2+}, \tau_{12}) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = M_0 \quad (21d)$$

Pour résumer :

$$\tau = 0 \quad M(0) = M_0$$

$$\tau \geq x_2 - x_1 \quad M(\tau) = M_0 \quad (22a)$$

4.2. Propriété résultant du prolongement

Il est important de noter que l'équation (19) possède une solution triviale :

$$M(\tau) = M_0 = cte \quad (22b)$$

Considérant (22a), s'il existe une autre solution, celle-ci possède au moins un extrémum $M(\tau_m)$. Supposons que ce soit un maximum : alors, dans un voisinage à gauche de τ_m on a :

$$\frac{dM}{d\tau} > 0 \quad \text{et} \quad M(\tau) > M_0$$

ce qui est incompatible avec l'équation (19). Il en est de même si l'extrémum est un minimum.

Ceci prouve l'unicité de la solution (22b). En conséquence :

Si la fonction $f(x)$ est munie de prolongements satisfaisant les conditions (18), alors $M(\tau) = M_0 \quad \forall \tau$. La moyenne est conservée pour l'ensemble des applications $\hat{f}(x, \tau)$.

En corollaire, puisque la moyenne d'une fluctuation est nulle, on peut considérer la fonction $\varphi(x, \tau) = f(x) - \hat{f}(x, \tau)$ comme *la fluctuation* de $f(x)$ par rapport à \hat{f} (voir aussi § 6.1).

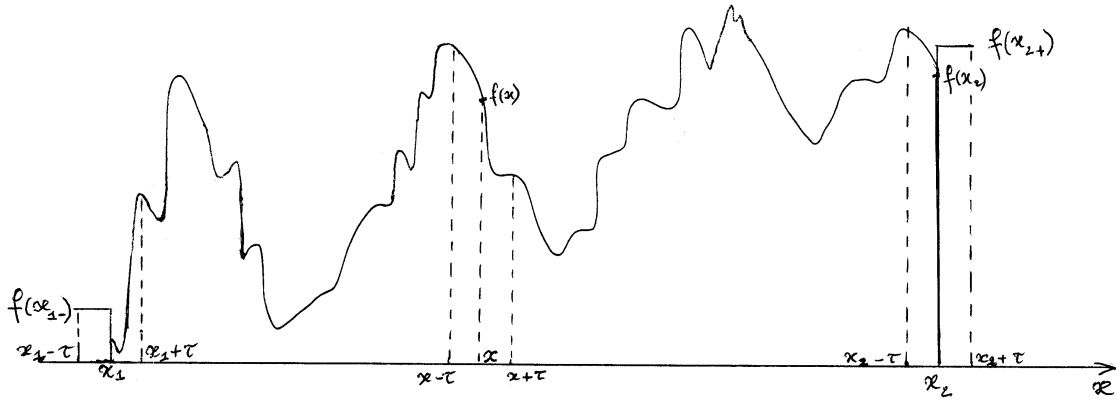


Figure 1. Fonction $f(x)$ prolongée au-delà des bornes

4.3. Valeurs particulières de la MM et de ses dérivées

a) Sur le segment $[x_1, x_1 + \tau]$, avec le prolongement, la MM (1) a pour expression :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x, \tau) &= \frac{1}{2\tau} \left\{ \int_{x_1-\tau}^{x_1} f(x_{1-}) dx + \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(v) dv \right\} \\ &= \frac{1}{2\tau} \left\{ (x_1 - x + \tau) f(x_{1-}) + \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(v) dv \right\}\end{aligned}$$

soit, en incluant l'expression de (20a) :

$$\hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \left\{ (x_1 - x + \tau) \frac{1}{\tau} \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(v) dv \right\} \quad (23a)$$

De manière analogue, sur $[x_2 - \tau, x_2]$, on obtient :

$$\hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \left\{ (x + \tau - x_2) \frac{1}{\tau} \int_{x_2-\tau}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2-\tau}^{x_2} f(v) dv \right\} \quad (23b)$$

b) La MM en x_1 a pour valeur :

$$\hat{f}(x_1, \tau) = \frac{1}{2\tau} \int_{x_1-\tau}^{x_1+\tau} f(x) dx = \frac{1}{2\tau} \int_{x_1-\tau}^{x_1} f(x_{1-}) dx + \frac{1}{2\tau} \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(x) dx$$

Avec la formulation (20a) :

$$\hat{f}(x_1, \tau) = f(x_{1-}, \tau) \quad (23c)$$

Le résultat est analogue en x_2 .

La valeur de la MM aux bornes est donc égale à celle de la fonction prolongée.

Par contre, en général, la fonction $f(x)$ prolongée sera discontinue aux bornes. Ceci ne prête pas à conséquence.

c) Lorsque $\tau \rightarrow 0$, rappelons la relation (4a) : $\hat{f}(x, 0) = f(x)$

D'autre part, si $\tau = \tau_{12} = x_2 - x_1$, alors : $x < x_2 \Rightarrow x - \tau_{12} < x_2 - (x_2 - x_1)$, soit : $x - \tau_{12} < x_1$

De même : $x > x_1 \Rightarrow x + \tau_{12} > x_2$

La moyenne mobile correspondante est :

$$\hat{f}(x, \tau_{12}) = \frac{1}{2\tau_{12}} \int_{x-\tau_{12}}^{x+\tau_{12}} f(v) dv$$

Décomposons l'intégrale :

$$\int_{x-\tau_{12}}^{x+\tau_{12}} f(v) dv = \int_{x-\tau_{12}}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x+\tau_{12}}$$

soit, d'après (3) et (21) :

$$\int_{x-\tau_{12}}^{x+\tau_{12}} f(v) dv = M_0(x_1 - x + \tau_{12}) + M_0(x_2 - x_1) + M_0(x + \tau_{12} - x_2) = 2 M_0 \tau_{12}$$

$$\boxed{\hat{f}(x, \tau_{12}) = M_0 = cte} \quad (24)$$

Ceci montre que la limite utile d'observation est atteinte lorsque $\tau = \tau_{12}$. A partir de cette valeur, l'observation ne fournit plus que la moyenne de la fonction.

d) La dérivée de la *MM* par rapport à x est donnée par (7). On en déduit que :

$$\tau \rightarrow 0 : \frac{\partial}{\partial x} \hat{f}(x, \tau) \rightarrow \frac{df(x)}{dx} \quad \forall x \quad (25a)$$

$$\tau = \tau_{12} = x_2 - x_1 : \frac{\partial}{\partial x} \hat{f}(x, \tau_{12}) = 0 \quad (25b)$$

4.4. Autres méthodes de traitement aux bornes

Dans la littérature, plusieurs options ont été envisagées à proximité des bornes.

- *Fenêtre réduite dissymétrique* : Pour les valeurs de x telles que $x_1 < x < x_1 + \tau$ à gauche, ou $x_2 - \tau < x < x_2$ à droite, on calcule la *MM* sur un intervalle réduit à $[x_1, x + \tau]$ (respectivement $[x - \tau, x_2]$).

- *Fenêtre réduite symétrique* : La fenêtre est réduite à une largeur de $2(x - x_1)$ à gauche, ou $2(x_2 - x)$ à droite, ce qui maintient la symétrie.

- *Tendances tronquées* : Dans l'analyse des séries numériques au moyen de *MM* centrées, on tronque généralement les tendances en les limitant à l'intervalle $[x_1 + \tau, x_2 - \tau]$ [GOD 17].

- *Prolongements par la valeur de la fonction aux bornes* : $f(x_{1-}) = f(x_1)$ et $f(x_{2+}) = f(x_2)$ [ROC 95, PAD 96].

Le calcul montre que toutes ces méthodes ont le même inconvénient : elles ne conservent pas la moyenne.

5. Variance des moyennes mobiles

La variance de l'ensemble des *MM* est une fonction de τ . Sachant qu'elles ont toutes la même moyenne M_0 , cette variance a pour expression [BAS 74] :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [\hat{f}(x, \tau)]^2 dx - M_0^2 \quad (26)$$

Ses valeurs aux limites sont :

$$\sigma^2(\tau = 0) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx - M_0^2 = \sigma_0^2 \quad (27a)$$

et d'après (24) :

$$\sigma^2(\tau_{12}) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [\hat{f}(x, \tau_{12})]^2 dx - M_0^2 = M_0^2 - M_0^2 = 0 \quad (27b)$$

Calculons la dérivée de la variance (26) :

$$\frac{d}{d\tau} \sigma^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{d}{d\tau} \int_{x_1}^{x_2} [\hat{f}(x, \tau)]^2 dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\tau} [\hat{f}(x, \tau)]^2 dx \quad (28)$$

On déduit de (7) que :

$$\frac{d}{d\tau} [\hat{f}]^2 = 2 \hat{f} \frac{d\hat{f}}{d\tau} = \frac{1}{\tau} \hat{f} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} - \frac{2}{\tau} \hat{f}^2 \quad (29)$$

La dérivée s'écrit donc finalement :

$$(x_2 - x_1) \frac{d}{d\tau} \sigma^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{x_1}^{x_2} \hat{f}(x, \tau) \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} dx - \frac{2}{\tau} \int_{x_1}^{x_2} [\hat{f}(x, \tau)]^2 dx \quad (30)$$

En particulier, compte tenu des propriétés déjà établies, on vérifie que :

$$\frac{d\sigma^2}{d\tau} = 0 \quad \text{pour } \tau = 0 \text{ et } \tau = \tau_{12} \quad (31)$$

La fonction $\sigma^2(\tau)$ est donc globalement décroissante, avec une dérivée nulle aux bornes. Mais rien ne permet de savoir *a priori* si elle présente des extrêma, ou bien si elle est monotone. Les figures 2 et 3 représentent quelques familles de variations à considérer. En fait, la plupart du temps, la variance des *MM* sera une combinaison de ces quatre familles.

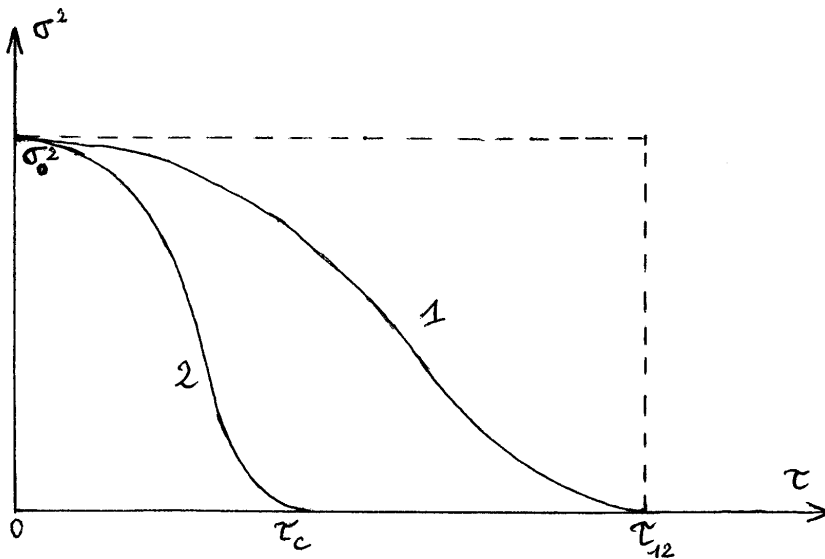


Figure 2. Fonction $f(x)$ de type 1 (décroissance régulière de $\sigma^2(\tau)$) et de type 2 (décroissance rapide de $\sigma^2(\tau)$)

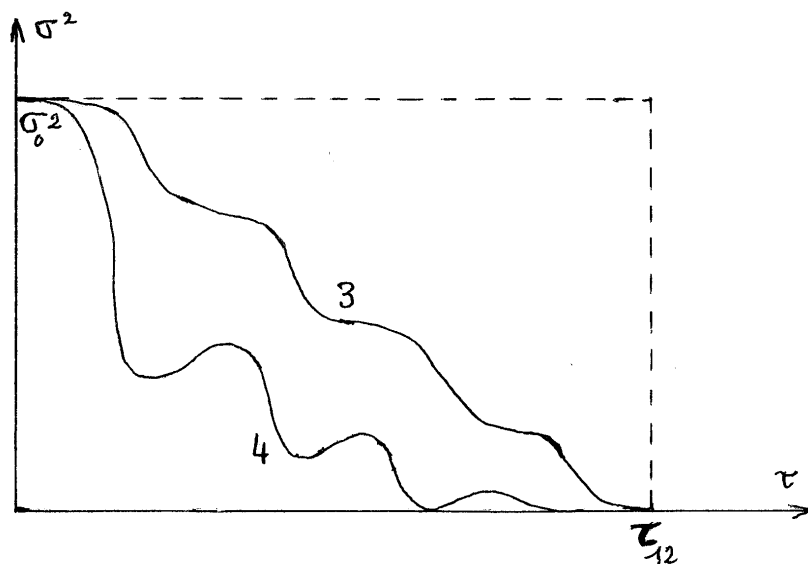


Figure 3. Fonctions $f(x)$ de type 3 (décroissance de $\sigma^2(\tau)$ par paliers) et de type 4 (décroissance oscillante)

L'examen de ces divers cas de figure (qui seront examinés en détail au § 7) conduit à formuler la conjecture suivante :

Les propriétés de la courbe $\sigma^2(\tau)$ permettent de sélectionner une suite de fenêtres τ_n ($0 \leq n \leq N$), telles que les moyennes mobiles associées $T_n(x)$ puissent être considérées comme des **tendances représentatives** du processus observé :

$$T_n(x) = \hat{f}(x, \tau_n) = \frac{1}{2\tau_n} \int_{x-\tau_n}^{x+\tau_n} f(v) dv \quad (32)$$

6. Moyennes mobiles d'une somme de fonctions

6.1. Cas général

Considérons le cas où $f(x)$ est la somme de p fonctions composantes $f_j(x)$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^p f_j(x) \quad (33a)$$

A chaque composante d'ordre j , on peut associer une famille de MM $\hat{f}_j(x, \tau)$, soit selon la définition (1) :

$$\hat{f}_j(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f_j(v) dv \quad (33b)$$

Cette application est additive à condition de conserver la valeur de τ , de sorte que :

$$\hat{f}(x, \tau) = \sum_{j=1}^p \hat{f}_j(x, \tau) \quad (34)$$

On notera que toutes les MM des composantes possèdent les propriétés établies précédemment pour les MM $\hat{f}(x, \tau)$. En particulier, si elles sont munies des prolongements (20), l'application (33) conserve leur moyenne M_{j0} :

$$M_j(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \hat{f}_j(x, \tau) dx = M_{j0} \quad (35)$$

On voit également que la moyenne de la somme est égale à la somme des moyennes des composantes :

$$M_0 = \sum_{j=1}^p M_{j0} \quad (36)$$

D'autre part, chaque composante $f_j(x)$ peut s'écrire comme la somme de sa moyenne M_{j0} et d'une composante fluctuante $\varphi_j(x)$, de moyenne nulle :

$$f_j(x) = M_{j0} + \varphi_j(x) \quad (37)$$

$$M_{\varphi_j} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_j(x) dx = 0 \quad (38)$$

D'après (33), (36) et (37), on a :

$$f(x) = M_0 + \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) \quad (39a)$$

$$\hat{f}(x, \tau) = M_0 + \sum_{j=1}^p \hat{\varphi}_j(x, \tau) \quad (39b)$$

Les MM des composantes fluctuantes sont les composantes de la MM globale.

6.2. Variances des MM composantes et de la fonction résultante

Examinons maintenant les variances. La définition (26) s'applique aussi aux MM des composantes. Ainsi, la variance de la MM $\hat{\varphi}_j(x, \tau)$ sera :

$$\sigma_{\varphi_j}^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[\hat{\varphi}_j(x, \tau) \right]^2 dx - M_{\varphi_j}^2$$

et, compte tenu de (38) :

$$\sigma_{\varphi_j}^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[\hat{\varphi}_j(x, \tau) \right]^2 dx \quad (40)$$

Egalement, (26), (34) et (36) donnent pour la MM résultante $\hat{f}(x, \tau)$:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{j=1}^p \hat{f}_j(x, \tau) \right]^2 dx - M_0^2 \quad (41)$$

Sachant que (37) devient, par l'application (1) :

$$\hat{f}_j(x, \tau) = M_{j0} + \hat{\varphi}_j(x, \tau) \quad (42)$$

alors, (41) s'écrit sous forme développée :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\sum M_{j0} \right)^2 + \left(\sum \hat{\varphi}_j(x, \tau) \right)^2 + 2 \sum M_{j0} \sum \hat{\varphi}_j(x, \tau) \right\} dx - M_0^2 \quad (43)$$

Le premier terme de l'accolade est égal à M_0^2 .

Puisque les MM conservent la moyenne, et que la moyenne de $\varphi_j(x)$ est nulle d'après (38), le troisième terme de l'accolade est nul :

$$2 \sum M_{j0} \int_{x_1}^{x_2} \sum \hat{\varphi}_j(x, \tau) dx = 0$$

Il reste donc dans (43) :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\sum_{j=1}^p \hat{\varphi}_j(x, \tau) \right)^2 \right\} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{j=1}^p \hat{\varphi}_j^2 + \sum_{m \neq n} \hat{\varphi}_m \hat{\varphi}_n \right\} dx \quad (44)$$

Enfin, en revenant à la propriété (40), on obtient :

$$\sigma^2(\tau) = \sum_{j=1}^p \sigma_{\varphi_j}^2(\tau) + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{m \neq n} \hat{\varphi}_m(x, \tau) \hat{\varphi}_n(x, \tau) \right\} dx \quad (45)$$

La variance de la *MM* résultante est la somme des variances des fluctuations, à laquelle s'ajoutent les produits vectoriels croisés $(\hat{\varphi}_m, \hat{\varphi}_n)$ avec $(m = 1 \text{ à } p; n = 1 \text{ à } p; m \neq n)$.

7. Analyse et interprétation

Rappelons d'abord le but principal de l'étude : on recherche des fenêtres d'observation « objectives », conduisant à des tendances caractéristiques de la structure du signal étudié. Les schémas des figures 2 à 4 permettent d'éclairer cette démarche.

Composantes $\varphi_j(\mathbf{x})$ de type 1 (fig. 2)

La régularité de la décroissance de $\sigma_{\varphi_j}^2(\tau)$ ne permet pas de mettre en évidence des fenêtres d'observation particulières. Les *MM* se rapprochent progressivement de la moyenne. Aucune ne peut être privilégiée par rapport aux autres. Il en est de même si le signal résultant est une somme de composantes de type 1.

Composantes $\varphi_j(\mathbf{x})$ de type 2 (fig. 2)

La variance diminue d'abord très lentement, puis très rapidement jusqu'à une valeur proche de zéro. Pour $\tau > \tau_{jc}$, on a $\sigma_{\varphi_j}^2(\tau) \approx O(\tau)$, et le premier terme de (45) subit une décroissance brusque.

D'autre part, dans le second terme de (45), la partie concernée par la composante j est :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{n=1}^p \hat{\varphi}_j(x, \tau) \hat{\varphi}_n(x, \tau) \right\} dx \quad (n \neq j) \quad (46)$$

Elle peut être positive ou négative, et on ne peut rien dire de sa valeur en fonction de τ , mais l'inégalité de Cauchy-Schwartz [BAS 77] nous donne quand même une information, à savoir :

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \hat{\varphi}_j(x, \tau) \hat{\varphi}_n(x, \tau) \right\} dx \right| \leq \left(\int_{x_1}^{x_2} \hat{\varphi}_j^2 dx \int_{x_1}^{x_2} \hat{\varphi}_n^2 dx \right)^{1/2} \quad (47)$$

Ceci s'écrit, en introduisant les écart-types (40) :

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \left| \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \hat{\varphi}_j(x, \tau) \hat{\varphi}_n(x, \tau) \right\} dx \right| \leq |\sigma_{\varphi_j}| |\sigma_{\varphi_n}| \quad (48)$$

Ici encore, la contribution de φ_j devient négligeable lorsque $\tau > \tau_{jc}$. Elle sera même rigoureusement nulle si $\hat{\varphi}_j$ et $\hat{\varphi}_n$ sont orthogonales, mais ceci ne peut se produire que dans des cas particuliers.

Considérant la somme des deux termes de (45), on observe une quasi extinction de la composante φ_j quand on a $\tau > \tau_{jc}$. Dans cette configuration, τ_{jc} peut être considérée comme une valeur de coupure de φ_j .

Alors, si le signal résultant (39a) contient une ou plusieurs composantes de type 2, la variance (45) de ses *MM* comportera une ou plusieurs marches descendantes, et prendra l'aspect d'une fonction de type 3 (fig. 3).

Composantes $\varphi_j(\mathbf{x})$ de type 3 (fig. 3)

Si une composante φ_j présente pour la variance de ses MM un comportement de type 3, alors on peut considérer qu'elle est elle-même une superposition de fonctions de type 2, et que le signal $f(x)$ n'a pas été décomposé en signaux suffisamment élémentaires.

Composantes $\varphi_j(x)$ périodiques

C'est une propriété connue [GOU 95] que, si le signal $f(x)$ comporte une partie périodique, de période T , une fenêtre de largeur $2\tau = nT$ (n entier) efface cette composante. Autrement dit :

$$\hat{\varphi}_j(x, \tau = nT/2) = 0 \quad \forall x \quad (49a)$$

En conséquence :

$$\sigma_{\varphi_j}^2(\tau = nT/2) = 0 \quad (49b)$$

Plus généralement, dans ce cas, on observera pour $\sigma_{\varphi_j}^2(\tau)$ une décroissance oscillante de type 4 (fig. 3), avec minima nuls, les maxima correspondant à la réapparition complète de la composante.

Composantes et tendances

De tout ce qui précède il résulte que les composantes $\varphi_j(x)$ peuvent avoir zéro, une ou plusieurs tendances $T_{kj}(x)$, chacune d'elles correspondant à une fenêtre τ_{kj} . D'après (39b), les moyennes mobiles sont additives à condition d'être associées à la même valeur de τ . Comme les τ_{kj} n'ont aucune raison d'être égaux, on en déduit qu'une tendance globale $T_n(x)$ n'est pas la somme des tendances des composantes :

$$T_n(x) \neq \sum T_{kj}(x) \quad (49c)$$

8. Extraction d'une composante

Composante de type 2

Revenons à la figure 2, et considérons une décroissance brusque due à l'extinction d'une composante j . Elle se produit entre τ_{jd} (valeur de décrochage, non marquée sur la figure) et τ_{jc} (valeur de coupure). On obtiendra donc une estimation de $\varphi_j(x)$ (et non une expression précise) par la soustraction :

$$\boxed{\varphi_j(x) \cong \hat{f}(x, \tau_{jd}) - \hat{f}(x, \tau_{jc})} \quad (50)$$

Composante périodique

D'après (49), un minimum de la variance résultante pour $\tau = \tau_m$ correspond à l'extinction d'une composante périodique de période $T = 2\tau_m/n$ (n à préciser). Cependant, la méthode ne permet pas de préciser son amplitude (on pourrait calculer la différence $\hat{f}(x, nT/2) - \hat{f}(x, (n+0,5)T/2)$, mais sur cet intervalle de τ les autres composantes varient aussi, de sorte qu'on ne peut pas la distinguer au sein de l'ensemble).

Autres composantes

Elles sont difficiles à isoler par cette méthode si elles ne subissent pas de diminution brusque de leur variance $\sigma_{\varphi_j}^2(\tau)$. Mais, de toute façon, l'extraction d'une composante n'est pas le but premier de cette étude.

9. Tendances stationnaires (tau-moyennes)

Une autre famille de tendances « objectives » peut encore être envisagée. Elle ne fait plus appel des caractères statistiques comme la variance, mais repose sur une propriété de stationnarité par rapport à la fenêtre d'observation.

La dérivée de la moyenne mobile $\hat{f}(x, \tau)$ par rapport à τ a été calculée au § 3.2., formule (11) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} - \frac{1}{\tau} \hat{f}(x, \tau)$$

Elle s'annule lorsque la moyenne de l'ensemble des valeurs sur τ est égale à la moyenne des deux valeurs extrêmes :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{f}(x, \tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2} \{f(x - \tau) + f(x + \tau)\} \quad (51)$$

Si, pour x donné, l'équation (51) possède une ou plusieurs solutions $\tau_{sk}(x)$ (avec $k = 1, 2, \dots$), celles-ci correspondent à des extrêma de la courbe $\hat{f}(x, \tau)$ (fig. 4). En ce sens, on peut dire que pour ces valeurs particulières, le résultat $\hat{f}(x, \tau_{sk})$ de l'observation est stationnaire par rapport à la fenêtre d'observation : une petite variation de τ est sans effet sur la valeur observée. Alors, la moyenne mobile :

$$\hat{f}[x, \tau_{sk}(x)] = \hat{f}_{sk}(x) \quad (52)$$

peut être considérée comme une *tendance stationnaire* (ou encore *τ -moyenne* [PAD 86, PAD 87]). Mais c'est *une tendance à fenêtre variable* : en chaque point x l'observation (ou l'approximation) est ajustée pour être stationnaire. Il s'agit là d'une catégorie fondamentalement différente des tendances à fenêtre constante. En particulier, pour cette classe d'approximations de $f(x)$, la moyenne M_0 n'est pas conservée.

A l'inverse, si la fonction $\hat{f}(x, \tau)$ est monotone selon τ , le signal ne possède aucune tendance stationnaire. Enfin, il est possible que (51) ait des solutions sur une partie seulement du domaine $[x_1, x_2]$, ou sur plusieurs parties disjointes, ce qui conduit à des tendances incomplètes.

Quoi qu'il en soit, le problème du calcul de \hat{f} à proximité des bornes se pose à nouveau. En effet, (52) n'est définie que si x et $\tau_{sk}(x)$ satisfont la double inégalité :

$$\begin{aligned} x - \tau_{sk}(x) > x_1 & \quad \text{à gauche, soit} & \quad \tau_{sk}(x) < x - x_1 \\ x + \tau_{sk}(x) < x_2 & \quad \text{à droite, soit} & \quad \tau_{sk}(x) < x_2 - x \end{aligned} \quad (53a)$$

ce qui se résume ainsi :

$$\tau_{sk}(x) < \min\{(x - x_1), (x_2 - x)\} \quad (53b)$$

Trois options se présentent alors :

- Accepter la restriction de la tendance stationnaire $\hat{f}_{sk}(x)$ aux valeurs de x satisfaisant la condition (53b).

- Prolonger $f(x)$ à gauche et à droite (cf. § 1.2 et 4). Mais selon quel critère ? Dans le cas présent, le prolongement par conservation de la moyenne, proposé au § 4, ne se justifie pas plus qu'un autre. Le plus simple serait alors de prolonger à gauche par $f(x_1)$ et à droite par $f(x_2)$:

$$f(x_{1-}) = f(x_1) \quad ; \quad f(x_{2+}) = f(x_2) \quad (54)$$

Cette convention a pour effet d'accorder un peu plus de poids aux deux valeurs extrêmes dans la recherche de tendance. Elle introduit évidemment un biais, léger avec les petites fenêtres, mais qui s'amplifie pour des valeurs plus élevées de τ_{sk} .

- Utiliser une fenêtre asymétrique (non centrée), $[x_1, x + \tau]$ à gauche ou $[x - \tau, x_2]$ à droite. La méthode devient envisageable ici, puisque la conservation de la moyenne n'est plus requise. Mais la définition de la moyenne mobile (1) doit être adaptée aux deux zones concernées, de largeurs respectives $x - x_1 + \tau$ et $x_2 - x + \tau$:

$$\text{A gauche : } \hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{x - x_1 + \tau} \int_{x_1}^{x + \tau} f(v) dv \quad \text{si } \tau > x - x_1 \quad (55a)$$

$$\text{A droite : } \hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{x_2 - x + \tau} \int_{x - \tau}^{x_2} f(v) dv \quad \text{si } \tau > x_2 - x \quad (55b)$$

Le calcul de la dérivée par rapport à τ est analogue à celui du § 3.2. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{f}(x, \tau) &= \frac{1}{x - x_1 + \tau} \{f(x + \tau) - \hat{f}(x, \tau)\} \quad \text{à gauche} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{f}(x, \tau) &= \frac{1}{x_2 - x + \tau} \{f(x - \tau) - \hat{f}(x, \tau)\} \quad \text{à droite} \end{aligned} \quad (56)$$

L'expression (51) (condition d'existence d'un extrémum) devient alors :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, \tau) &= f(x + \tau) \quad \text{à gauche} \\ \hat{f}(x, \tau) &= f(x - \tau) \quad \text{à droite} \end{aligned} \quad (57)$$

En effectuant ce choix, on évacue le souci du prolongement au - delà des bornes. Certes, ceci a été fait au prix d'une modification dans la moyenne mobile, mais qui n'altère pas l'esprit de la méthode.

Il semble que cette dernière option soit à recommander. Mais la seconde a le mérite de la simplicité.

10. Conclusion

Nous avons présenté deux méthodes d'observation des phénomènes complexes basées sur des propriétés fonctionnelles de leurs moyennes mobiles.

Pour les moyennes mobiles à fenêtre τ constante, la variance $\sigma^2(\tau)$, globalement décroissante, peut présenter localement des décroissances brusques ou des extréma. Les décroissances brusques correspondent à l'atténuation, ou à l'extinction d'une composante non périodique. Les extréma correspondent à l'extinction, ou à la réapparition d'une composante périodique ou pseudo-périodique. Les *MM* basées sur ces valeurs particulières de la fenêtre d'observation peuvent alors être considérées comme des tendances profondes et caractéristiques du phénomène étudié. Toutefois, les propriétés mises en évidence ne sont valides que si les moyennes des tendances sont identiques à la moyenne de la fonction sur le domaine d'étude, ce qui nécessite un prolongement spécifique aux bornes de ce domaine.

La seconde démarche, qui implique des moyennes mobiles à fenêtre variable, repose sur la stationnarité de l'observation en chaque point.

Les deux méthodes proposées (l'une globale, l'autre locale) offrent ainsi de nouvelles possibilités pour la détection d'échelles d'observation optimales, adaptées au processus analysé. Elles pourraient être aussi utilisables dans certains calculs numériques, où le remplacement d'un fichier par sa tendance permettrait d'accélérer la convergence.

En dernière conclusion, il est clair que cette publication, purement mathématique, voit son intérêt limité par l'absence d'applications concrètes et de comparaisons avec d'autres méthodes modernes de traitement du signal. La raison en est que l'auteur n'a ni la compétence, ni les moyens matériels de combler cette lacune. Mais, on peut espérer que d'autres chercheurs soient intéressés par le sujet. Alors, l'analyse qui a été présentée leur permettrait de le prendre en main, et de le traiter de façon plus complète et plus approfondie.

Bibliographie

- [BAS 74] BASS J., « Eléments de calcul des probabilités », *Masson*, 1974.
- [BAS 77] BASS J., « Cours de mathématiques », *Dunod*, 1977.
- [GOD 17] GODICHON-BAGGIONI A., « Cours de statistiques », *Ed. INSA de Rouen, France*, 2017.
- [GOU 95] GOURIEROUX C., MONFORT A., « Séries temporelles et moyennes dynamiques », *Economica*, 1995.
- [PAD 77] PADET J., PADET C., CAMES-PINTAUX A.-M., MUGUR-SCHÄCHTER M., « Observation, informations et entropies », *Entropie*, n°72-73, p.5-20, 1977.
- [PAD 86] PADET C., PADET J., « Le concept de tau-moyenne et son application à la représentation de phénomènes d'apparence chaotique », *Conf. Int. sur le Traitement d'Informations et la Gestion d'Incertitudes – IPMU*, Paris, 1986.
- [PAD 87] PADET C., PADET J., « Etude d'une classe d'approximations pour un ensemble continu de données », *Congrès ICIAM*, Paris, 1987.
- [PAD 93] PADET C., PADET J., ROCHE J.-M., « Analyse structurelle d'un phénomène irrégulier », *Second European Congress on Systems Science*, Prague, Rep. Tchèque, 1993.
- [PAD 94] PADET C., PADET J., ROCHE J.-M., « Sinuosité et tendance d'un phénomène évolutif », *Analyse de Systèmes*, vol. XX, n°1, p.43-58, 1994.
- [PAD 96] PADET C., ROCHE J.-M., « New methods in data analysis : potentials offered for the study of variable phenomena », *ICHMT Int. Symposium on Convective Heat Transfer, CONV96*, Cesme, Turquie, 1996.
- [ROC 91] ROCHE J.-M., PADET C., PADET J., « Inconstance et analyse structurelle d'un phénomène irrégulier », *Cybernetica*, vol.XXXIV, n°4, 1991.
- [ROC 92] ROCHE J.-M., PADET C., PADET J., « Non-linearity index and trends of irregular phenomena », *Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty, IPMU'92*, Mallorca, Espagne, 1992.
- [ROC 95] ROCHE J.-M., « Tendances d'un phénomène irrégulier : Définition et caractérisation », *Thèse Doctorat Université de Reims*, France, 1995.
- [ROC 96] ROCHE J.-M., PADET C., PADET J., « Tendances et tendance ultime d'un phénomène non-linéaire. Echelle d'observation », *Journée d'études « Thermique et physique non-linéaire »*, Société Française de Thermique, 1996.

ANNEXE

Pour faciliter la mise en oeuvre pratique de la théorie exposée plus haut, on propose ici une présentation détaillée des étapes de calcul.

Moyennes mobiles à fenêtre constante

Cas d'une fonction continue

1 – Tracer la courbe $f(x)$. Calculer la moyenne M_0 de $f(x)$ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$

2 – Choisir une suite bornée τ_k de valeurs de τ ($k = [1, \dots, K]$, $\tau_k < x_2 - x_1$) et calculer chaque MM de fenêtre τ_k , en trois étapes (correspondant au découpage de l'intervalle $[x_1, x_2]$ en trois zones, cf. figure 1) (l'indice k a été omis dans les formules ci-dessous) :

- à gauche : $x_1 \leq x < x_1 + \tau$

$$\hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \left\{ (x_1 - x + \tau) \frac{1}{\tau} \int_{x_1}^{x_1 + \tau} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_1 + \tau} f(v) dv \right\} \quad (23a)$$

- partie centrale : $x_1 + \tau \leq x \leq x_2 - \tau$

$$\hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv \quad (1)$$

- à droite : $x_2 - \tau < x \leq x_2$

$$\hat{f}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau} \left\{ (x + \tau - x_2) \frac{1}{\tau} \int_{x_2 - \tau}^{x_2} f(x) dx + \int_{x - \tau}^{x_2} f(v) dv \right\} \quad (23b)$$

N.B. **La partie centrale disparaît** si $x_1 + \tau \geq x_2 - \tau$, soit $2\tau \geq x_2 - x_1$. Pour ces valeurs de τ , le programme de calcul devra être adapté en conséquence.

3 – Calculer les variances $\sigma^2(\tau)$ par (26) pour les différentes valeurs τ_k :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [\hat{f}(x, \tau)]^2 dx - M_0^2$$

4 – Tracer la courbe $\sigma^2(\tau)$. Repérer s’il existe des valeurs remarquables τ_n (variations rapides de $\sigma^2(\tau)$, extrêma ...). Si oui, tracer les tendances $T_n(x) = \hat{f}(x, \tau_n)$ correspondantes (cf. 36).

5 – Pour quelques valeurs de τ , calculer la moyenne $M(\tau)$ et vérifier la propriété $M(\tau) = M_0$

Cas d'une fonction discrète

Pour éviter des confusions d'indices, l'intervalle de définition sera noté ici $[x_1, x_p]$.

Sur $[x_1, x_p]$, $f(x)$ est donnée par un fichier numérique de P valeurs $f(x_p)$, avec un pas d'échantillonnage Δx (en conséquence, $x_p = x_1 + p \Delta x$ et $x_p = x_1 + P \Delta x$). Dans le calcul, les intégrales seront donc ramenées à des sommes simples.

1 – Représenter les points $f(x_p)$. Calculer la moyenne M_0

$$M_0 = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P f(x_p)$$

2 - Choisir une suite de valeurs de τ , soit $\tau_k = k \Delta x$ (k entier > 0 , $k < P$). Le nombre total K de valeurs de k est à fixer empiriquement selon la nature du fichier (valeur de P et irrégularité de $f(x)$).

3 - Comme pour une fonction continue, calculer la MM de fenêtre τ_k - qui est un fichier de P valeurs $\hat{f}_k(x_p, \tau_k)$ - en divisant l'intervalle $[x_1, x_p]$ en trois (cf. fig. 1) :

- à gauche : $x_1 \leq x_p < x_1 + \tau_k \Leftrightarrow \boxed{1 \leq p < k}$

$$\boxed{\hat{f}(x_p, \tau_k) = \frac{1}{2k} \left\{ (1 - p + k) \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k f(x_p) + \sum_{q=1}^{p+k} f(x_q) \right\}} \quad (\text{équivalent à 23a})$$

- partie centrale : $x_1 + \tau_k \leq x_p \leq x_p - \tau_k \Leftrightarrow \boxed{k \leq p \leq P - k}$ (car $x_p = x_1 + P \Delta x$)

$$\boxed{\hat{f}(x_p, \tau_k) = \frac{1}{2k} \sum_{q=p-k}^{p+k} f(x_q)} \quad (\text{équivalent à 1})$$

- à droite : $x_p - \tau_k < x_p \leq x_p \Leftrightarrow \boxed{P - k < p \leq P}$

$$\boxed{\hat{f}(x_p, \tau_k) = \frac{1}{2k} \left\{ \sum_{q=p-k}^P f(x_q) + (p + k - P) \frac{1}{k} \sum_{p=P-k}^P f(x_p) \right\}} \quad (\text{équivalent à 23b})$$

N.B. *La partie centrale disparaît* si $1 + k \geq P - k$, soit si $2k \geq P - 1$ (les zones de gauche et de droite se touchent). Pour ces valeurs de k , le programme de calcul doit être adapté en conséquence.

4 – Calculer les variances $\sigma^2(\tau_k)$ et la variance $\sigma_0^2 = \sigma^2(0)$ qui est celle de $f(x)$

$$\sigma^2(\tau_k) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P [\hat{f}(x_p, \tau_k)]^2 - M_0^2 \quad (\text{équivalent à 26})$$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P [f(x_p)]^2 - M_0^2 \quad (\text{équivalent à 27a})$$

5 – Tracer la courbe $\sigma^2(\tau_k)$. Repérer s'il existe des valeurs remarquables τ_n (variations rapides de $\sigma^2(\tau)$, extrêma ...). Si oui, tracer les tendances $T_n(x) = \hat{f}(x, \tau_n)$ correspondantes.

Moyennes mobiles à fenêtre variable (tendances stationnaires, ou τ – moyennes)

Le principe des tendances stationnaires a été présenté dans le § 9. La fenêtre d'observation est ici auto-adaptative, d'où $\tau = \tau(x)$.

Conformément à l'option (54) (la plus simple), on prolonge $f(x)$ au-delà des bornes par :

$$\begin{aligned} x < x_1 & \quad f(x) = f(x_1) \\ x > x_2 & \quad f(x) = f(x_2) \end{aligned}$$

Cas d'une fonction continue

1 - Résoudre numériquement l'équation (51) pour un échantillon de valeurs de x :

$$\frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(v) dv = \frac{1}{2} \{f(x-\tau) + f(x+\tau)\}$$

Les solutions, si elles existent, sont notées $\tau_{sq}(x)$, avec $q = 1, 2, \dots$ et $\tau_{s1} < \tau_{s2} < \tau_{s3} \dots$

Sur les segments où il n'existe pas de solution, prendre $\tau_{sq}(x) = 0$

2 - Tracer les courbes $\tau_{s1}(x)$, $\tau_{s2}(x)$... (ceci n'est pas strictement nécessaire, mais il est utile d'avoir une information visuelle sur les variations de ces paramètres).

3 – Calculer et tracer les tendances stationnaires $T_{sq}(x)$ d'ordre q avec :

$$T_{sq}(x) = \hat{f}[x, \tau_{sq}(x)] = \frac{1}{2\tau_{sq}(x)} \int_{x-\tau_{sq}(x)}^{x+\tau_{sq}(x)} f(v) dv \quad (v \text{ étant une variable muette}).$$

Lorsqu'il n'y a pas de solutions $\tau_{sq}(x)$, le fait de prendre $\tau_{sq}(x) = 0$ entraîne :

$$T_{sq}(x) = f(x) \quad \forall q \quad (f(x) \text{ est alors localement sa propre tendance})$$

Cas d'une fonction discrète

Pour éviter des confusions d'indices, l'intervalle de définition sera noté ici $[x_1, x_p]$.

Sur $[x_1, x_p]$, $f(x)$ est donnée par un fichier numérique de P valeurs $f(x_p)$, avec un pas d'échantillonnage Δx (en conséquence, $x_p = x_1 + p \Delta x$ et $x_p = x_1 + P \Delta x$).

1 – Résoudre l'équation (51) en chaque point x_p :

$$\frac{1}{2\tau} \int_{x_p-\tau}^{x_p+\tau} f(v) dv = \frac{1}{2} \{f(x_p-\tau) + f(x_p+\tau)\}$$

ce qui revient à chercher les zéros de la fonction :

$$F(\tau(x_p)) = \frac{1}{2\tau} \int_{x_p-\tau}^{x_p+\tau} f(v)dv - \frac{1}{2} \{f(x_p - \tau) + f(x_p + \tau)\}$$

Les solutions, si elles existent, sont notées $\tau_{sq}(x)$, avec $q = 1, 2, \dots$ et $\tau_{s1} < \tau_{s2} < \tau_{s3} \dots$

Mais ici, elles ne seront généralement pas des multiples entiers de Δx . Autrement dit :

$$\tau_{sq}(x_p) \neq k \Delta x \quad (k \text{ entier})$$

Il faut donc :

- soit calculer F avec sa forme discrétisée :

$$F(\tau(x_p)) = \frac{1}{2k} \sum_{q=p-k}^{p+k} f(x_q) - \frac{1}{2} \{f(x_p - k \Delta x) + f(x_p + k \Delta x)\},$$

puis encadrer les éventuelles solutions :

$$k_p \Delta x < \tau_{sq}(x_p) < (k_p + 1) \Delta x ,$$

et arrondir à : $\tau_{sq}(x_p) = k_p \Delta x$ ou $\tau_{sq}(x_p) = (k_p + 1) \Delta x$

- soit transformer $f(x)$ en fonction continue (ligne brisée) par linéarisation entre deux valeurs successives de p :

$$x_p < x < x_{p+1} \quad f(x) = x_p + \frac{x - x_p}{x_{p+1} - x_p} \Delta x$$

Sur les segments où il n'existe pas de solution, prendre $\tau_{sq}(x) = 0$

2 & 3 – Idem § 2 et 3 précédents

Remarque : Le calcul des tendances stationnaires est sensiblement plus lourd que celui des tendances à fenêtre constante.