

Projet « Lîla-Entropie »

Le projet « Lîla-Entropie », est un projet à vocation heuristique. Sans déroger à la rigueur scientifique qui s'impose, le préfixe « Lîla » qualifie explicitement le présent projet au moyen d'un attribut d'origine Sanscrit indiquant la volonté des contributeurs de cerner, directement ou indirectement, les fondements thermodynamiques de l'évolution du monde, de l'acte créateur qui y prend corps, puis d'en penser le management et le contrôle.

Ne répondant pas encore à l'ordonnancement définitif qui apparaîtra dans une synthèse finale, le volume 1 introduit, non sans analyse critique des fondements de la notion d'entropie, les conditions de stabilité et d'évolutions d'entités définies par certaines classes singulières d'interactions hiérarchisées (Bruter) ainsi que celle d'émergence d'un « vivant historicisé » adossée à la notion d'anti-entropie (Chollat-Namy, Longo). Ces premiers modèles d'émergence sont alors mis en regard de systèmes dynamiques disposant de mémoires donc susceptibles de donner lieu à une évolution, à une histoire, à une ontogénèse (Galhano). Quoiqu'encore interrogée quant à ses interprétations et à sa formalisation mathématique (Sabatier), il est montré que l'universalité de beaucoup de ces systèmes à mémoires repose sur des métriques autosimilaires, des statistiques et des algèbres non entières (Tsallis, Le Méhauté, Nivanen), propriétés dont les corrélations dans l'ordre des échelles constitueront un des attracteurs cognitifs du projet. En effet tous les concepts considérés seront peu ou prou rattachés à des schémas et représentations du monde dont nous assurons ou présumons la capacité créatrice et organisationnelle. Le gène universel de cette capacité doit, comme il sera démontré dans le volume 2, être associé au pontage du discret et du continu, -incidemment au forcing-, ici par le truchement de la fonction zêta de Riemann. On constatera que cette fonction acquiert sa signification physique profonde en particulier par le biais de deux facteurs principaux : (i) sa faculté d'approximation de presque toutes les fonctions analytiques (théorème de Voronin/Bagchi) et (ii) la relation fonctionnelle qui caractérise la fonction zêta en mode dual ($\zeta_{\alpha}(s) \Leftrightarrow \zeta_{1-\alpha}(1-s)$ où $s=\alpha+i\theta$), soit implicitement l'orientation alors devenue absolue du plan complexe qui en est le support naturel. Le besoin d'en référer à la théorie des catégories pour comprendre le plus simplement possible le pontage en question et la flèche du temps qui en résulte, conduit au passage d'une approche locale différentielle à une approche par le biais de catégories monadiques explicitant alors le lien local/global et l'universalité observée des géométries autosimilaires, en dépit de la multiplicité des motifs alors concevables pour une même métrique fractale « α ». Explicitant sous le mode le plus simple qui se puisse concevoir le Topos de la dynamique (AVA19) par ailleurs susceptible d'être fibré et uni-paramétré au moyen d'un « temps complexe », le déploiement de l'analyse à partir du Site associé au Topos de faisceaux confient alors à la géométrie-algébrique la révélation et la synthèse des propriétés de désordre qui affectent les processus physiques sur un univers non plus plat mais chiffonné (JPLU99). La notion d'entropie pourra évidemment se nourrir de cette nouvelle approche. Voyons pourquoi et comment.

On rappelle que, dans la perspective du second principe de la thermodynamique (Carnot 1824-32), le concept d'Entropie est pensé et enseigné depuis sa création par Rudolf Clausius en 1865 comme LA fonction d'état pivot d'une thermodynamique (initialement science des machines et moteurs (Thomson/Kelvin 1850), localement linéaire, homogène (NIBO68) et cependant... irréversible de fait. Le concept grec d'*Entropê* apparaît après analyse assez éloigné de la signification élémentaire que lui attribue la pédagogie de premier cycle. Au-delà de l'idée de transformation, Il porte en lui en effet, l'action de retournement, d'altérité, de hiérarchie, d'élan vers l'autre, de tropisme, de chemin vers la clarté. L'imperfection de tout système réel *per se*, conduit en action donc en échange, à générer une chaleur irréductible à son propre conatus. Généralisée

l'homéostasie n'opère pas sans une perte d'énergie. Mis en évidence implicitement par Carnot, mais explicitée et qualifiée par Clausius, (frottements, viscosité, transitions) le concept d'Entropie donnera lieu à une représentation statistique (Fonction H (1872) de Ludwig Boltzmann (1844-1906)). Selon les travaux de l'historien des sciences Giovanni Gallavoti (GG84) et (GG89) Boltzmann comprend avant tout autre, la profondeur heuristique des travaux de Hermann Helmholtz (1821-1894) portant sur la capacité des projections cycliques à représenter des systèmes thermodynamiques (HH95). Selon cet historien, c'est avec la notion d'*orthodes* et de *multimodes* (GG94), (BA77) et (BO64) qu'il anticipe les notions d'ensembles canoniques (JWG02) usuellement attribuée à Willard Gibbs (1839-1903). Le point important est qu'il utilise pour y parvenir, un principe ergodique sur un espace de phase discrétisé au moyen de cycles et de constantes de temps. L'interprétation statistique de l'équilibre à laquelle cette représentation donne lieu par passage à la limite thermodynamique, confirme que l'Entropie ne peut qu'augmenter (au moins dans un système isolé alors que l'Energie corrélativement utilisée par le système diminue). On notera que le passage à la limite, marginale dans les travaux de Boltzmann, n'est alors pas mathématiquement examiné alors même qu'il tend à identifier l'intégrale et la sommation. On rappelle à cet égard que la notion d'invariant énergétique fait sens sous réserve que les conditions de Noether soient respectées : à savoir implicitement l'absence de toute histoire et de tout lieu préférentiel pour les processus considérés (ENO04) principe à priori contraire à une quelconque sensibilité aux conditions aux limites. La statistique en jeu conduit alors à associer le concept d'Entropie aux conditions d'indiscernabilité et de combinatoires des entités atomiques dans des espaces de type « boîte fermée discrétisée » soumise à une température T donnée. L'énergie réellement disponible est dite libre et défalque une énergie indisponible liée à l'Entropie, soit $F=U-TS$ relation faisant apparaître face à l'énergie interne U , le terme TS avec T l'intensité ou « mesure globale » associée à l'Entropie (vue comme son facteur extensif donc dénombrable). L'enthalpie libre $G=H-TS$ est plus fréquemment employée dans les sciences chimiques (JWG02) qui excluent généralement l'usage de l'énergie mécanique (pV), d'où $H=U+pV$. Ceci ne signifie pas que la thermodynamique ne puisse pas être ramenée à une science mécanique. Telle est la signification du fait que l'entropie est une fonction d'état dans cette science et donne lieu à une différentielle totale. A ce stade l'analyse thermodynamique semble établir une corrélation entre l'augmentation de l'entropie et une augmentation du désordre ou, à tout le moins, une augmentation des facteurs de confusions et d'ambiguïtés propres aux dynamiques et aux entités en jeu ; indiscernabilité peu compatible avec les principes édictés par Noether. A contrario, l'ambiguïté semble contradictoire avec l'ordre au moins partiel dont témoigne l'organisation du monde qui nous entoure. Nous existons dans une boîte, notre planète et sa minuscule enveloppe, thermodynamiquement contrainte, dans laquelle émerge du vivant et du social tout autant que du désordre et du conflit. Entropie contradictoire donc avec l'idée de progrès transmise par la renaissance tout autant que par la philosophie des lumières et véhiculée tant par les artistes que par les ingénieurs ; contradictoire également avec des expériences réelles ou de pensées, telle celle des urnes de Erhenfest (1880-1933) qui utilisant des boules numérotées et des lois de permutations simples mais répétitives entre boules, engendre un désordre dans les urnes tout en démontrant que, dans tout système fini initialement organisé, ce désordre est strictement temporaire, l'itération conduisant toujours à un retour à l'état initial après un certain temps de récurrence. Le fait que ce temps puisse être supérieur à l'âge de l'univers si le nombre de boule est suffisant, ne change rien à la conclusion : le désordre est géographiquement et historiquement contraint et le *temps de retour* et le *nombre de boule* sont liés par une relation dont la linéarité ou son absence reste, à ce stade, ouverte sur une question sémantique : quid de ce que l'on nomme « *irréversibilité* » ? En effet, comme le note G. Gallavoti l'interprétation des travaux de Boltzmann par Paul Erhenfest doit en cette matière, être considérée comme historiquement délétère en particulier parce qu'elle a gommé tant l'importance accordée par Boltzmann à la discrétisation de l'espace de phase que le fait qu'il ne pouvait exister de trajectoire unique du système sur la surface d'énergie constante. Cette dernière affirmation d'Erhenfest a conduit en particulier à confondre le temps de récurrence et le temps d'accès à l'équilibre correspondant à une visite seulement partielle de l'espace de phase (GG94).

Revenant à la question initiale, la dualité ordonnancement / créativité serait-elle, par le truchement d'une temporalité, une affaire de *théorie des nombres* -donc en suivant tant Henri Poincaré (1854-1912) avec les équations fuchsiennes, que Nicolas Lobatchevski (1792-1856) avec les géométries non euclidiennes-, une affaire de pavages du plan complexe ? Nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

Que le concept d'Entropie contribue à la représentation du monde moderne n'est pas sans signification sociologique, anthropologique et ici épistémologique. Il nous faut en effet situer cette représentation à l'aune du *coup de force aristotélien* qui au 13^{ème} siècle a conduit certains clercs à assimiler notre modélisation du monde au monde lui-même et la vérité aux seules solutions de problèmes bien posés (PAJO09). Or le monde complexe exige des réponses ; non nécessairement des solutions. Dès lors, un monde chaotique interroge notre être au monde lui-même ; une identité devenue dynamique (BAAL18) et une vérité devenue une focale scientifique (CCD13), ont de quoi mettre le démon de Laplace dans tous ses états (DEFU15). L'histoire qui motive les contributeurs au dossier « Lîla-Entropie » est, avouons-le, adossée à une très vieille interrogation métaphysique qui précède de loin, le coup de force évoqué, à savoir : comment peut-on concilier le déterminisme des lois de la nature et le libre arbitre propre à l'espèce humaine ? Réfléchissant à haute voix à propos des travaux de Boltzmann, Maxwell (1831-1879) a explicité cette interrogation en 1873 lors d'une conférence devant ses amis de l'Eranus Club sous le titre : *Does the progress of Physics sciences tend to give any advantage to the opinion of necessity, (determinism over that of contingency of events and the freedom of the will)* (MAXJ84) ? On ne saurait être plus clair quant à la finalité du projet alors même que la statistique de Maxwell-Boltzmann, comme beaucoup d'autres lois de la physique, reposent essentiellement sur la fonction exponentielle, fonction connue pour ses capacités à relier l'addition (séries, succession) à la multiplication (parallélisme, changement d'échelle) sans barguiner quant aux propriétés de convergences (JM90). Dans le cadre restreint contraint par le statut standard de l'entropie et de sa semblable la fonction H, le rôle de la fonction logarithme -donc implicitement de son inverse, la fonction exponentielle- conduit à disposer d'un élargissement possible de la perspective algébrique, les lois exponentielles cédant la place aux lois de puissances. Mais cette élargissement ne peut opérer sans lever la dégénérescence cachée derrière l'exponentielle car les dualités habituelles log/exp, directe/inverse, addition/multiplication, série/parallèle, déterminisme/statistique, reposant sur les axiomes de l'arithmétique de Guiseppe Peano (1858-1932) impliquant implicitement une autosimilarité à l'octave $\mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ne peuvent pas être étendues simplement aux dualités non linéaires faisant jouer des lois d'échelles : unité|multiplicité, intensité|extensité, local|global, étoile|triangle, interne|externe, planéité|hyperbolicité, etc. Les corrélations entre échelles de mesure introduisent en effet alors des questions de tailles non linéaires en particulier dans les problématiques de composition algébrique donc de bilans. Comme le montrera Philippe Riot dans le volume 2 du projet « Lîla Entropie », c'est à cette question de taille, par le truchement de la dualité complexifiée Addition| Multiplication que répond la fonction zêta de Riemann exprimée au moyen de la double égalité dotée précisément de lois de puissance: $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} = \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$. En cela, c'est la nature du lien entre la fonction zêta et les systèmes dynamiques différentiables (SY70), (BSC90) et (RD80) impliquant de fait une généralisation et une universalisation de la dualité logarithme versus exponentielle que le projet va précisément interroger.

On doit à Constantin Carathéodory (1873-1950) avant celle de von Neumann (1903-1957) puis celle de David Ruelle (1935), une approche strictement axiomatique de la thermodynamique (1909). Cet ingénieur allemand fait reposer (CAR09) son approche outre sur un axiome de transitivité qu'on trouve déjà chez Euclide (en substance : *si un objet est identique à un second et que celui-ci est identique à un troisième alors le premier et le troisième sont identiques*), également sur un second axiome d'apparence abstraite mais que l'on retrouvera au cœur de la problématique des systèmes dynamiques associée à la fonction zêta, à savoir : *Dans le voisinage de tout système à l'équilibre (ou stationnaire) il existe des états inaccessibles par des processus adiabatiques*

réversibles. La présence de dualités locales Irréversible/réversible et divergence/convergence pour les géodésiques de systèmes dynamiques -en évidence en lien avec l'observation d'une sensibilité aux conditions initiales- lui permet, alors qu'il ne précise pas la taille de la « différence » (BSMM19), de déduire l'existence d'une grandeur appelée température T, grandeur intensive associée à une extensité assimilable à l'Entropie S vue comme une fonction d'état. Pour parvenir à cette conclusion Carathéodory associe ses axiomes à la classe des équation différentielles dites de Pfaff (1814-15) d'où il déduit toutes les lois de la thermodynamiques connues à la fin du 19^{ème} siècle, en particulier l'affirmation selon laquelle il n'existe pas de cycle permettant une conversion de chaleur en travail sans perte énergétique (principe de Carnot) ou les lois de comportement des gaz (parfaits ou non). Daniel Bennequin et ses élèves, dont on montrera dans le volume 2 comment ils définissent l'entropie de l'information via les approches cohomologiques, associent ces équations à des entrelacement de géodésiques (DB83) et (PVI19) qui nous rapprochent des systèmes dynamiques en environnement hyperbolique qu'interpelle entre autres, après les travaux de Caroline Séries (SECA91) et (CASE02), le projet « Lîla Entropie ». Le statut de ces entrelacements aux limites catégoriques en sera une question majeure.

Toujours adossé à l'existence d'un travail éprouvant, l'acte créateur requiert un écart à l'optimalité de l'action quotidienne ; tout artiste et ingénieur le sait d'expérience. Réduite à minima et attachée à une volonté d'ingénierie, ce type de pertes s'exprime mathématiquement au moyen d'une notion qui a mis des siècles à émerger : précisément la notion d'Entropie évoquée ci-dessus. Est-elle pour autant, dans son état actuel, suffisante pour penser aux marges de la science normale (TKH62) ? Cette question n'est pas fondamentalement différente de celle, lancinante, attachée au statut de la flèche du temps. Le projet « Lîla-Entropie » a pour objet de tenter de conférer un contenu géométrique et algébrique à ces questions. Il n'y parviendra pas de manière fermée mais de manière ouverte en tentant de fibrer les contours aujourd'hui ténus du statut catégorique et épistémologique non de la notion d'entropie seule mais de la dualité Entropie/Anti-Entropie. Ce dernier concept, distinct de la notion de négentropie (Erwin Schödinger (1887-1961) ; Léon Brillouin (1889-1969)) pensée en termes de stabilité d'organisations ouvertes sur des environnements variables, a été conçue en particulier par Giuseppe Longo et ses collaborateurs comme grandeur physique capable d'exprimer la potentialité et l'historicité du vivant (FBGB09). Eloignée des principes de Noether, cette notion confère une étonnante faculté à battre en brèche la causalité associée aux logiques de premier ordre de nos représentations standards, en remontant le cours naturel du temps qui passe, pour donner paradoxalement vie au passé, en s'appuyant sur un futur réifié (FW15) . C'est comme il sera montré, dans l'ordonnancement partiel d'un feuilletage du plan complexe ressemblant à une partition sous tendu par la fonction zêta que s'inscrit alors temporellement le qualificatif « Lîla ». Il évoquera alors en particulier à tout mélomane averti la *Turangalîla Symphonie* d'Olivier Messiaen, musique requérant une multiplicité de portées, de cycles et d'unités de temps (FW15) que l'on retrouvera sous forme exacerbée dans les problématiques de feuilletages et partitions des systèmes dynamiques ouverts et dissipatifs, premier objet des recherches communes des contributeurs après et à la marge des travaux de Ruelle ou de Sinai parmi bien d'autres. Le rôle de la dualité en convolution Fonction Zêta / Fonction de Möbius jouera évidemment un rôle central en matière de dualisation.

Partant donc paradoxalement de l'adjonction de la notion de création -vue sous la couverture de l'Anti-Entropie-, et de la notion d'Entropie, le projet pourra être qualifier d'iconoclaste par d'aucuns. Les éditeurs conseillent néanmoins aux sceptiques de prendre le temps de lire le contenu des volumes qui se succéderont avec les jumelles de l'histoire mouvementée des machines imaginaires [N.L. Sadi Carnot (1796-1832), Rudolf Clausius (1822-1888), Turing (1912-1954)] mais aussi celles des systèmes dynamiques, [Yiakov Sinai (1935), Jean-Christophe Yoccoz (1957-2016) Caroline Series (1951)] avant d'explorer la profondeur ontologique et l'efficience prospective des outils mathématiques ici mis en œuvre (FJEE11), (AVAE19). En effet, inscrit dans les pas de Pierre Duhem et d'Ilia Prigogine (IPG71), chaussés à l'égal de ceux d'Henri Poincaré (HPO02) et d'Alexandre Grothendieck (AVA19), les contributeurs au projet « Lîla-Entropie » ont

tous pour but de confronter, directement ou indirectement, le concept d'Entropie à des contextes macroscopiques peu académiques : non homogénéités, non dérivabilité, absence de régularité, de normalisation, de séparabilité voire certains types d'absences de connexité pour des espace de Hausdorff majoritairement ajourés. La présence de mesure sous-additives ou non archimédiennes, voire nulles, interrogeront les modalités de clôture des corps et anneaux de représentations et la question du forcing des ensembles en jeu. La connexion de lieux de dissipation aux sites feuilletés des bilans (ACC14) impliquant de nouvelles logiques et des dualités voire des objets-points, sera considérée. On verra ci-dessous comment ces questions ont, non sans hésitations, allers-retours et difficultés conceptuelles voire politiques, progressivement émergées d'ambiguïtés cognitives et de paradoxes inscrits depuis bien longtemps dans l'histoire des sciences et celle de nos représentations de la complexité du monde.

...à suivre...

Alain Le Méhauté & Michel Feidt Editeurs

Remerciements : Claude Bruter pour son analyse critique d'une tentative précédente d'éditorial.

Références

- (SY70) Sinai, Y.: Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards, (1970) Russian Mathematical Surveys, 25, 137–189,.
- (ACC14) Connes Alain, Consani Caterina, The scaling site (2016) C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354, 1-6. et Geometry of the scaling site, Arxiv 1603.03191
- (AVA19) Valence Arnaud, Montrer et démontrer : la dualité d'Isbell ou les voies à double sens des raisonnements scientifiques (2019) Editions de la sorbonne. Paris
- (BAAL18) Badiou Alain, L'Immanence des vérités. L'Être et l'Événement (2018) Fayard. Paris,
- (B064) Boltzmann, L.: Lectures on gas theory (1964) English edition annotated by S. Brush, University of California Press, Berkeley.
- (BA77) Bach, A.: Boltzmann's probability distribution of 1877 (1990), Archive for the History of exact sciences, 41, 1-40.
- (BSC90) Bunimovitch, L., Sinai, Y., Chernov, N: Statistical properties of two dimensional hyperbolic billiards (1990), Russian Mathematical Surveys, 45, n. 3, 105–152,.
- (BSMM19) Stiegler Bernard & Montévil Maël, Entretien sur l'entropie, le vivant et la technique 1 (2019), Links series vol 1 pp. 68-77 *Entretien sur l'entropie, le vivant et la technique : Deuxième partie - Maël Montévil (montevil.org)*
- (CAR09) Carathéodory Constantin, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik (Researches on the foundations of thermodynamics) Math. Ann. 67 (1909) 355–386; Über die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe von reversiblen Prozessen (On the calculation of energy and of the absolute temperature with the help of reversible processes), Akad. Wiss. Phys. Math. K1 (1925) 39–47.
- (CASE02) Series Caroline, Mumford Davis and Wright David, Indra's pearls (2002) Cambridge university Press. Cambridge.
- (CCD13) Connes Alain, Chéreau Danye, Dixmier Jacques, Le théâtre quantique (2013) Odile Jacob. Paris
- (DB83) Bennequin daniel, Entrelacements et équations de Pfaff (1983) Astérisque, tome 107-108, p. 87-161
- (DEFU15) Deffuant G., Banos A., Chavalarías D., Bertelle C., Brodu N., Jensen P., Lesne A., Müller J.P., Perrier E., Varenne F., Vision de la complexité. Le démon de Laplace dans tous ses états (2015) Nature Sciences Société 23, pp 42-53
- (ENO04) Kosmann-Scharzbach Yvette Les théorèmes de Noether, Invariance et lois de conservations au 20^{ème} siècles (2004) Editions de l'Ecole Polytechnique Saclay
- (FBGL09) Bailly, Francis, & Longo, Guisepe. Biological organization and anti-entropy (2009) Journal of Biological Systems, 17, 63–96

- (FJE11) Jedrzejewski Franck, *Ontologie des catégories* (2011) l'Harmattan, Paris,
- (FW15) Wolf Francis, *Pourquoi la musique* (2015) Fayard, Paris.
- (GG84) Gallavotti, G.: *Meccanica Statistica*, entry for the "Enciclopedia italiana delle scienze fisiche", preprint Roma, 1984. In print (scheduled publication, 1994). The published version will also include another entry, originally written to be a separate one, *Equipartizione e critica della Meccanica Statistica Classica*, Roma, preprint 1984. See also the entry *Teoria Ergodica*, preprint Roma, 1986, for the "Enciclopedia del Novecento".
- (GG89) Gallavotti, G.: *L' hypothese ergodique et Boltzmann*, (1989) in "Dictionnaire Philosophique", p. 1081– 1086, Presse Universitaires de France, Paris,
- (GG94) Gallavotti Giovanni, *Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond* (1994) arXiv:chaos-dyn/9403v128 mars 1994
- (HASL90) Harvey S. Leff and Andrew F. Rex, *Maxwell's demon Entropy Information and computing* (1990) Princeton series in physics
- (HH95) Helmholtz, Hermann: *Studien zur Statik monocyclischer Systeme*, (1895) in "Wissenschaftliche Abhandlungen", vol. III, p. 163–172 and p. 173– 178, Leipzig.
- (HPO02) Poincaré Henri, *La science et l'hypothèse* (1902) Flammarion Paris
- (IPG71) Prigogine Ilya et Glansdorff Pierre, *Structure, stabilité et fluctuations* (1971), Masson, Paris
- (PAJO09) Jorion Paul, *Comment la vérité et la réalité furent inventées*, (2009) Gallimard, Paris
- (JM90) Maxwell, James : *On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points*, (1890) in "The scientific papers of J.C. Maxwell", ed. W. Niven, Cambridge University Press, , vol. II, p.713–741.
- (JPLU99) Luminet Jean Pierre, *L'univers chiffonné* (1999) Fayard, Paris.
- (JWG02) Gibbs Josiah Willard, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (1902) Charles Scribner's Sons, New York.
- (MAXJ 84) Maxwell James *Does the progress of Physics sciences tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of contingency of events and the freedom of the will ?* (1884) *The life of James Clerk Maxwell with selection from his correspondence and occasional writings* pp 440-444
- (NIBO68) Nino Boccara, *Les principes de la thermodynamique classique* (1968) Presse Universitaire de France, Paris.
- (PVI19) Vigneaux Juan Pablo, *Topology of statistical systems: A cohomological approach to information theory* (2019) Doctorat en mathématiques, sous la direction de D. Bennequin Université Sorbonne Cité. Paris
- (RD80] Ruelle, David: *Measures describing a turbulent flow* (1980) *Annals of the New York Academy of Sciences*, 357, 1–9,. Voir aussi Eckmann, J., Ruelle, D.: *Ergodic theory of strange attractors* (1985) *Reviews of Modern Physics*, 57, 617–656; and Ruelle, D.: *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, (1980) *Publications Mathématiques de l' IHES*, 50, 275–306,
- (SECA 91) Series Caroline éditrice avec T. Bedford et M. Keane *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces* (1991) Oxford University Press.
- (SY70) Sinai, Yakov.: *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*, (1970) *Russian Mathematical Surveys*, 25, 137–189.
- (TKH 62) Kuhn, Thomas. S. *The Structure of Scientific Revolutions*. (1962) University of Chicago Press.