

Une analyse de la nature interne des modèles fractionnaires

An analysis of the internal nature of fractional order models

Jocelyn Sabatier¹

¹ Université de Bordeaux, Laboratoire IMS, UMR 5218 CNRS, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France, jocelyn.sabatier@u-bordeaux.fr

RÉSUMÉ. Au moyen de quelques transformations mathématiques, cet article révèle la nature interne des modèles fractionnaires (ou modèles non entier) décrits par des équations différentielles fractionnaires ou des pseudo représentations d'états. En particulier, le calcul de la réponse impulsionnelle des modèles fractionnaires considérés à l'aide de la méthode de Cauchy montre qu'ils présentent des constantes de temps infiniment petites et infiniment grandes. La représentation diffusive de ces modèles en est déduite. En utilisant la transformée de Fourier, une représentation des modèles fractionnaires par une équation de diffusion définie sur un domaine spatial infini est alors déduite. Les modèles fractionnaires peuvent ainsi être vus comme des modèles doublement infinis : infinis car ils sont distribués et également infinis car ils sont définis sur un domaine spatial infini. Ce domaine infini ou les constantes de temps infiniment grandes de la réponse impulsionnelle révèlent une propriété intrinsèque aux modèles fractionnaires : leur mémoire infinie.

ABSTRACT. Through some mathematical transformations, this paper highlights the internal nature of fractional models described by fractional differential equations or pseudo state space descriptions. In particular, the impulse response computation for considered fractional model using the Cauchy method shows that they exhibit infinitely small and high time constants. The diffusive representation of these models is the deduced. Using Fourier transform a representation of fractional models with a diffusion equation defined on an infinite space domain is then deduced. Fractional models can thus be viewed as doubly infinite dimensional models: a first infinite as they are distributed and a second infinity as they are defined on an infinite domain. This infinite domain or the infinitely large time constants of the impulse response reveal a property intrinsic to fractional models: their infinite memory.

MOTS-CLÉS. Modèles fractionnaires, dérivation fractionnaire, représentation diffusive, mémoire longue.

KEYWORDS. Fractional models, fractional differentiation, diffusive representation, long memory.

1. Introduction

Les comportements fractionnaires et les modèles fractionnaires (ou non entiers) sont deux concepts différents. Sous l'appellation de "comportements fractionnaires", tous les phénomènes physiques présentant une cinétique en loi de puissance peuvent être regroupés. Quant aux modèles fractionnaires, ils désignent un (parmi d'autres) des outils du domaine de recherche du calcul fractionnaire qui peuvent être utilisés pour capturer des comportements fractionnaires. Mais les origines des modèles fractionnaires et plus largement du calcul fractionnaire ne résultent pas de justifications physiques. Ils résultent de la solution de l'équation de diffusion de Fick sur un domaine infini ou ont été introduits simplement parce qu'ils ont eux aussi des comportements dynamiques fractionnaires et des distributions de constantes de temps [COL 1941]. Ceci en fait des outils efficaces pour le fittage de données issues de comportements fractionnaires. Donner du sens aux modèles fractionnaires (a posteriori) a pourtant été une préoccupation de nombreux chercheurs. Des interprétations mathématiques [GOR 1998] [MAI 1998], physiques [NIG1992] [RUT1995], géométriques [BEN 1997] [POD 2002], statistiques [TEN 2003] ont donc été recherchées. Mais ces approches ne permettent pas vraiment de comprendre leur nature et surtout leurs avantages et inconvénients. Dans cet article, plusieurs transformations mathématiques sont utilisées pour démontrer que les modèles fractionnaires sont dotés d'une propriété intrinsèque et physiquement questionnable : ce sont des modèles de dimension doublement infinis :

– infinis car ils sont distribués

–et infinis également car ils sont définis (la distribution des paramètres) sur un domaine spatial infini.

Les modèles fractionnaires sont donc « *apparemment* » profondément non réalistes et leur pension à faire jouer des infinis est profondément perturbante pour un ingénieur et un physicien.

2. Analyse physique et systémique des modèles fractionnaires

2.1. Définition des modèles analysés

Les modèles fractionnaires appartiennent à une classe de modèles qui a été introduite pour modéliser des comportements présentant des lois de puissance (ou disons fractionnaires). Sans s'appuyer sur des justifications physiques, les modèles fractionnaires analysés à la suite ont été introduits en généralisant simplement les outils de modélisation existants, en remplaçant simplement les opérateurs de dérivation classiques par des opérateurs de dérivation fractionnaire.

Avec $u(t) \in \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}$ respectivement désignés comme entrée et sortie, une équation différentielle fractionnaire est définie dans la littérature par une équation de la forme :

$$\sum_{k=0}^{N_a} a_k \mathbf{D}_{t_0}^{v_{a_k}} (y(t)) = \sum_{k=0}^{N_b} b_k \mathbf{D}_{t_0}^{v_{b_k}} (u(t)) \quad \text{pour } t > 0. \quad [1]$$

Dans la relation [1] $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k \in \mathbb{R}$. $\mathbf{D}_{t_0}^{v_{a_k}}$ et $\mathbf{D}_{t_0}^{v_{b_k}}$ désignent respectivement des opérateurs de dérivation fractionnaire d'ordre $v_{a_k} \in \mathbb{R}$ et $v_{b_k} \in \mathbb{R}$ [SAM 1993]. Diverses définitions peuvent être utilisées pour décrire ces opérateurs [CAP 2014], ce qui pose la question du choix. Ces définitions sont à certains égards équivalentes, mais des différences existent notamment sur la prise en compte des conditions initiales.

La « fractionnalisation » d'un autre outil de modélisation bien connu a également été proposée dans la littérature si les ordres de dérivation v_{a_k} and v_{b_k} vérifient les conditions suivantes :

$$v_{a_k} = k/q \quad \text{and} \quad v_{b_k} = k/q, \quad q \in \mathbb{N} \text{ and } q > 0. \quad [2]$$

Ces conditions, dites conditions de commensurabilité, permettent de réécrire la relation [1] sous la forme (sous conditions initiales nulles) :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{t_0}^v X(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{pour } t > 0. \quad [3]$$

Cette représentation est connue dans la littérature sous la désignation de « pseudo représentation d'état ». "Pseudo" car le vecteur $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ne peut pas être considéré comme l'état du modèle car il ne s'agit pas de la quantité minimale d'information requise pour prédire le futur du modèle. Dans la relation (3), $v = 1/q$ est l'ordre fractionnaire du modèle et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et $D \in \mathbb{R}$ sont des matrices constantes.

La transformée de Laplace appliquée aux relations [1] ou [3] (avec conditions initiales nulles) permet une représentation en fonction de transfert de la forme :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}. \quad [4]$$

Les modèles [1] et [3] sont très largement utilisés dans la littérature quand on parle de modèles fractionnaires (ou non entiers).

2.2. Distribution des pôles et des constantes de temps, mémoire infinie

La première analyse physique proposée dans cet article est basée sur la réponse impulsionnelle des modèles [1] et [3]. Cette réponse impulsionnelle résulte de la transformation de Laplace inverse suivante:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st} ds. \quad [5]$$

Dans la relation [5], la valeur de c est choisie supérieure à l'abscisse des points singuliers de $H(s)$ et le calcul de l'intégrale est effectué en utilisant le contour de Bromwich-Wagner Γ de la figure 1 qui contourne l'axe négatif par le point de branchement $z = 0$ pour $t > 0$. Il évite ainsi le domaine plan complexe pour lequel la fonction de transfert $s^\nu = 0$ n'est pas définie, i.e. le segment $]-\infty, 0]$. Comme illustré par la figure 1, ce contour est l'union de six sous-contours: $\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_6$.

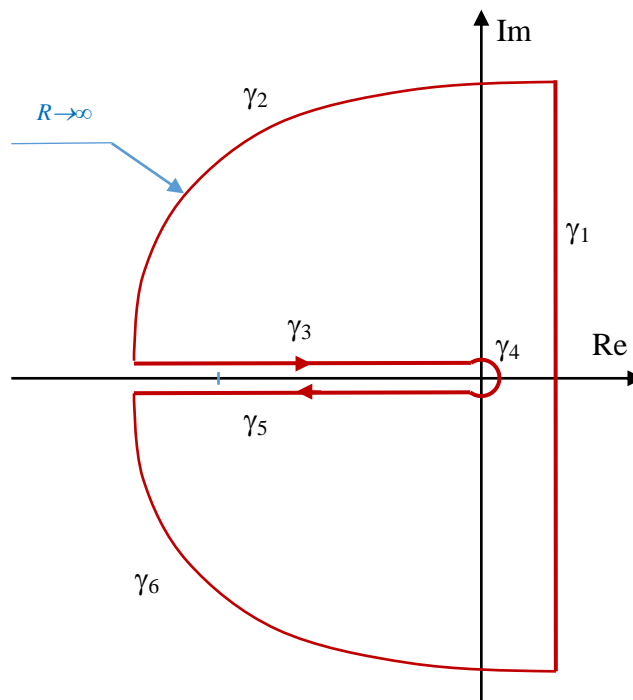


Figure 1. Contour Γ considéré pour le calcul de la réponse impulsionnelle $h(t)$

En utilisant le théorème des résidus, la relation [5] se réécrit sous la forme:

$$h(t) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma-\gamma_1} H(s)e^{ts} ds + \sum_{poles \text{ in } \Gamma} \text{Res}[H(s)e^{ts}], \quad [6]$$

avec, dans le cas d'un pole simple p pour $H(s)e^{ts}$

$$\text{Res}_p[H(s)e^{ts}] = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)H(z)e^{tz}. \quad [7]$$

La relation [6] impose donc le calcul des pôles de $H(s)$ et démontre que la réponse impulsionnelle des modèles [1] et [3] peut se scinder en deux parties, et donc s'écrire:

$$h(t) = h_p(t) + h_d(t). \quad [8]$$

La fonction $h_p(t)$ résulte des pôles des modèles [1] et [3] (résidus de la méthode de Cauchy). Elle caractérise un système linéaire classique qui ne sera pas considéré à la suite. La fonction $h_d(t)$ est liée à la partie diffusive du modèle. L'adjectif "diffusive" est expliqué à la suite (voir paragraphe 2.3). La fonction $h_d(t)$ est définie par [MON 1998]:

$$h_d(t) = \int_0^\infty \mu(z)e^{-tz} dz, \quad [9]$$

relation dans laquelle la fonction $\mu(x)$ est définie dans [MAT 1998] par:

$$\mu(z) = \frac{1}{2i\pi} [H((-z)^-) - H((-z)^+)] \quad \text{avec} \quad \mu(z) \in \mathbb{R}. \quad [10]$$

La transformée de Laplace de la fonction $h_d(t)$ est donnée par:

$$h_d(s) = \int_0^\infty \frac{\mu(z)}{s+z} dz. \quad [11]$$

Si une entrée $u(t)$ est appliquée à la partie diffusive de réponse impulsionnelle $h_d(t)$, la sortie $y_d(t)$ est le produit de convolution:

$$y_d(t) = \int_0^t \int_0^\infty \mu(z) e^{-(t-\tau)z} u(\tau) dz d\tau = \int_0^\infty \mu(z) \int_0^t e^{-(t-\tau)z} u(\tau) d\tau dz. \quad [12]$$

En introduisant la fonction $w(t, z)$ telle que :

$$w(t, z) = \int_0^t e^{-(t-\tau)z} u(\tau) d\tau, \quad [13]$$

la relation [12] peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,z)}{\partial t} = -zw(t,z) + u(t) \\ y_d(t) = \int_0^\infty \mu(z) w(t,z) dz \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}_+. \quad [14]$$

Cette représentation est connue dans la littérature sous le nom de représentation diffusive [MON 1998] [MAT 1998]. Les représentations [11] et [14] des modèles fractionnaires sont particulièrement intéressantes car elles permettent de révéler des propriétés mal connues et pourtant fondamentales car elles renseignent sur la nature interne des modèles fractionnaires et sur la façon de les initialiser. La relation (11) met en évidence que les modèles [1] et [3] ont des pôles (valeurs de z) distribués de 0 à $-\infty$. Les modèles [1] et [3] sont donc munis de constantes de temps infiniment rapides et infiniment lentes (elles sont atténuées par la fonction $\mu(\cdot)$, mais elles existent). La relation [14] révèle l'impact de ces pôles (ou constantes de temps) sur l'initialisation des modèles fractionnaires. Tous les pôles doivent être initialisés car la fonction $w(0, z)$ doit être initialisée avec $z \in \mathbb{R}_+$. Cela confère aux modèles fractionnaires une mémoire infinie et une quantité infinie d'information nécessaire à leur initialisation (tout le passé est nécessaire à cette initialisation depuis $-\infty$). A noter qu'un lien entre les opérateurs fractionnaires et la distribution des pôles de 0 à $-\infty$ a également été mis en évidence dans [CAP 1971].

2.3. Définition sur un domaine spatial de dimension infini

Cette section met en évidence le lien intrinsèque existant entre les modèles fractionnaires et une définition sur un domaine de dimension infinie. C'est le cas dans [LEM 1983] [MET 2000] [BAR 2000] où un modèle fractionnaire est déduit d'un phénomène physique mais en considérant des dimensions spatiales infinies. Mais ceci peut aussi être illustré par un exemple très simple qui fait apparaître l'opérateur d'intégration fractionnaire à partir d'un phénomène physique. Cet opérateur est en effet solution de l'équation de la chaleur si l'on considère un domaine spatial de dimension infinie. A titre de démonstration, le plan semi-infini de la figure 2 est considéré. Le système thermique étudié est supposé parfaitement isolé sur l'axe radial, il n'y a donc pas d'échange thermique avec l'extérieur. La densité de flux thermique $\varphi(t)$ est appliquée sur la surface normale sortante du milieu. Les pertes sur la surface où le flux thermique est appliqué sont négligées.

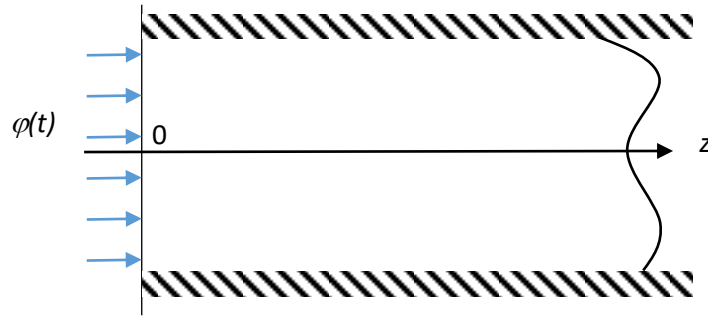


Figure 2. Milieu plan semi-infini

Dans le milieu de la figure 2, le transfert de chaleur est donc régi par l'équation aux dérivées partielles 1D suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{z^p} \frac{\partial}{\partial t} \left(z^p \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right), & z > 0, \quad t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(z,t)}{\partial n} = \varphi(t), & z = 0, \quad t > 0 \\ T(z,t) = 0 & z > 0, \quad t = 0 \end{cases} \quad [15]$$

où p est une variable qui dépend de la géométrie considérée. Dans le cas d'un milieu plan semi-infini, $p = 0$ et $r = z$, z étant l'abscisse de la mesure de température dans le milieu (figure 2). Le système [15] peut alors être simplifié et devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}, & z > 0, \quad t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(z,t)}{\partial n} = \varphi(t), & z = 0, \quad t > 0 \\ T(z,t) = 0 & z > 0, \quad t = 0 \end{cases} \quad [16]$$

L'évaluation de la transformée de Laplace de la première équation conduit à :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(z,s)}{\partial z^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(z,s) = 0 \quad \text{où} \quad \bar{T}(z,s) = \mathcal{L}\{T(z,t)\} \quad [17]$$

qui représente une équation différentielle ordinaire sur la variable x . Sa solution est donnée par :

$$\bar{T}(z,s) = K_1(s)e^{-z\sqrt{s/\alpha}} + K_2(s)e^{-z\sqrt{s/\alpha}}. \quad [18]$$

Compte tenu des conditions limites, la fonction de transfert suivante peut être exprimée :

$$H(z,s) = \frac{\bar{T}(z,s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho c_p}} e^{-z\sqrt{s/\alpha}}. \quad [19]$$

Pour $z = 0$, la fonction de transfert liant le flux de chaleur $\varphi(t)$ à la température $\bar{T}(z,s)$ est l'intégrateur fractionnaire $\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho c_p}}$, montrant ainsi la nécessité de considérer un domaine de dimension infinie pour l'obtenir.

Cette nécessité peut s'étendre à des ordres différents de l'ordre 0.5 et précisément dans le cadre de l'étude des phénomènes de relaxation sur des interfaces poreuses fractales. En utilisant des lois de puissance pour décrire ce milieu [SAP 1988], il est en effet nécessaire de considérer des distances infiniment petites de pénétration dans le milieu pour faire apparaître que l'impédance du milieu se comporte comme une fractance [LEM 1983]. Ces exemples mettent également en évidence de la dualité entre domaine fréquentiel et spatial. La nécessité d'une distribution des constantes de temps sur un domaine fréquentiel infini pour faire apparaître l'opérateur d'intégration fractionnaire, se traduit par la nécessité de dimensions infinies dans le domaine spatial.

L'analyse inverse peut également être effectuée, à savoir essayer d'obtenir une représentation spatiale des modèles fractionnaires. A cette fin, le modèle [14] est réécrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,z)}{\partial t} = -zw(t,z) + u(t) \\ y_d(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(z)w(t,z)dz + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(z)w(t,z)dz \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}_+ . \quad [20]$$

Le changement de variable $\rho = -\sqrt{z}$ et $\rho = \sqrt{z}$ sont respectivement utilisés dans la première et la seconde intégrale de la relation [20]. Le modèle obtenu est donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(t,\rho)}{\partial t} = -\rho^2\psi(t,\rho) + u(t) \\ y_d(t) = \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} 2\rho\mu(\rho^2)\psi(t,\rho)d\rho + \frac{1}{2} \int_0^\infty 2\rho\mu(\rho^2)\psi(t,\rho)d\rho \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R} , \quad [21]$$

avec $\psi(t,\rho) = w(t,\rho^2)$. Après simplifications, la relation [21] devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(t,\rho)}{\partial t} = -\rho^2\psi(t,\rho) + u(t) \\ y_d(t) = \int_{-\infty}^\infty |\rho|\mu(\rho^2)\psi(t,\rho)d\rho \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R} . \quad [22]$$

Si la transformée de Fourier inverse est appliquée à la première équation de la relation [22] (sur la variable ρ), elle se réécrit sous la forme:

$$\frac{\partial \phi(t,\zeta)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(t,\zeta)}{\partial \zeta^2} + u(t)\delta(\zeta) \quad \zeta \in \mathbb{R} , \quad [23]$$

où

$$\psi(t,\rho) = \mathcal{F}\{\phi(t,\zeta)\} = \int_{-\infty}^\infty \phi(t,\zeta)e^{-j\rho\zeta}d\zeta ,$$

et [24]

$$\phi(t,\zeta) = \mathcal{F}^{-1}\{\psi(t,\rho)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(t,\rho)e^{j\rho\zeta}d\rho .$$

Etant donné que $\psi(t,\rho)$ est une fonction réelle et paire, selon les propriétés de la transformée de Fourier, la fonction $\phi(t,\zeta)$ est aussi réelle et paire. Le modèle [22] peut être réécrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(t,\zeta)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(t,\zeta)}{\partial \zeta^2} + u(t)\delta(\zeta) \\ y_d(t) = \int_{-\infty}^\infty |\rho|\mu(\rho^2)\mathcal{F}\{\phi(t,\zeta)\}d\rho \end{cases} . \quad [25]$$

Etant donné que:

$$\begin{aligned} y_d(t) &= \int_{-\infty}^\infty |\rho|\mu(\rho^2) \left(\int_{-\infty}^\infty \phi(t,\zeta)e^{-j\rho\zeta}d\zeta \right) d\rho \\ &= \int_{-\infty}^\infty \phi(t,\zeta) \int_{-\infty}^\infty |\rho|\mu(\rho^2)e^{-j\rho\zeta}d\rho d\zeta , \end{aligned} \quad [26]$$

la relation (26) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(t,\zeta)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(t,\zeta)}{\partial \zeta^2} + u(t)\delta(\zeta) \\ y_d(t) = \int_{-\infty}^\infty m(\zeta)\phi(t,\zeta)d\zeta \end{cases} \quad \zeta \in \mathbb{R} , \quad [27]$$

avec $m(\zeta) = \mathcal{F}\{|\rho|\mu(\rho^2)\}$.

La fonction $\mu(\rho^2)$ étant réelle et paire, la fonction $m(\zeta)$ est aussi réelle et paire. L'intégrale définissant $y_d(t)$ dans la relation (27) peut donc se réécrire sous la forme:

$$y_d(t) = 2 \int_0^\infty m(\zeta)\phi(t, \zeta)d\zeta = \int_0^\infty m(\zeta)2\phi(t, \zeta)d\zeta, \quad [28]$$

et le modèle (27) devient donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi(t, \zeta)}{\partial t} = \frac{\partial^2\phi(t, \zeta)}{\partial \zeta^2} + 2u(t)\delta(\zeta) \\ y_d(t) = \int_0^\infty m(\zeta)\phi(t, \zeta)d\zeta \end{cases} \quad \zeta \in \mathbb{R}_+. \quad [29]$$

La relation (29) renseigne sur la nature des modèles fractionnaires. Comme illustré par la figure 3, ils peuvent être décrits par une équation de diffusion sur un domaine de dimension infinie ($\zeta \in \mathbb{R}_+$). Ils peuvent donc être vus comme des modèles doublement infinis (infinis car distribués et infinis car définis sur un domaine spatial infini). Ce domaine spatial infini impose une initialisation avec une quantité infinie d'informations : $\phi(0, \zeta), \zeta \in \mathbb{R}_+$.

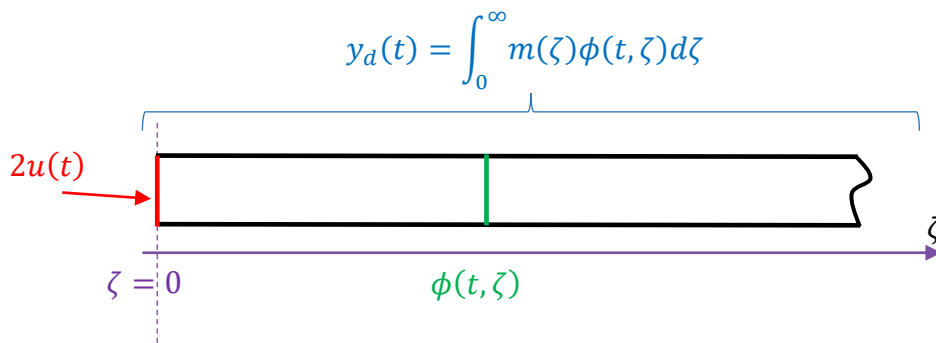


Figure 3. Représentation spatiale d'un modèle fractionnaire

On peut ainsi conclure que toute tâche de modélisation utilisant les modèles (1) ou (3) conduit à représenter un système physique par un modèle aux dimensions spatiales infinies. Attendu l'approche qui précède, les modèles de pensée qui font intervenir mémoire et infini, méritent d'être interrogés car si seul l'infini dénombrable est mesurable, la modélisation mathématique peut mettre en jeu des transfinis de limites et de co-limites qu'il faut pouvoir ramener à une mesure par des méthodes catégoriques, combinatoires ou logiques. Tel est la question que pose l'approche diffusive que nous proposons pour faire pièce aux apories qui peuvent naître de l'approche fractionnaire.

3. Conclusion

Les opérateurs fractionnaires et les modèles fractionnaires qui en résultent sont connus pour leur propriété de mémoire. Il s'agit d'une propriété intéressante qui permet de capter les comportements en loi de puissance souvent rencontrés dans les problèmes de modélisation. Pour cette classe de comportements, des modèles ayant une mémoire sont en effet nécessaires, mais pas une mémoire infinie. Et c'est malheureusement le cas avec les modèles fractionnaires. Leur mémoire infinie est démontrée dans cet article en appliquant des transformations mathématiques. Ces transformations mettent en évidence que les modèles fractionnaires (décrits par une équation différentielle fractionnaire ou une pseudo description d'espace d'état) sont dotés de constantes de temps infiniment petites et infiniment grandes. Cet article montre également qu'un modèle fractionnaire peut être représenté par une équation de diffusion définie sur un domaine spatial infini [SAB 2021a]. Et ce sont précisément ces constantes de temps infiniment grandes ou le domaine spatial infini qui sont les

raisons d'une mémoire infinie et d'une quantité infinie d'information nécessaire à leur initialisation [SAB 2021b].

Malheureusement, de nombreuses études consacrées aux modèles fractionnaires semblent ignorer cette façon de considérer les modèles fractionnaires, ce qui conduit à des erreurs d'initialisation de ces modèles [SAB 2020a]. Leur mémoire infinie impose de considérer tout le passé du modèle et pas seulement une condition initiale comme avec la définition de Caputo.

Les modèles fractionnaires ne sont cependant qu'une classe de modèles parmi tant d'autres capables de capter les comportements présentant des lois de puissance sans les inconvénients des modèles fractionnaires [SAB 2020b] [SAB 2021c]. D'autres solutions ont été récemment évoquées : opérateurs à noyaux à mémoire limitée [SAB 2020c], équations de Volterra [SAB 2020d], modèles à retards distribués [SAB 2020e], modèles variant dans le temps, modèles non linéaires [TAR 2020] [TAR 2021], équations de diffusion à coefficients spatialement variables [SAB 2020f] ou encore des équations fonctionnelles qui comme démontré dans [NIG 2023] permettent de modéliser des comportements avec des lois de puissance. Considérer les comportements en loi de puissance sans se limiter aux modèles fractionnaires ouvre d'innombrables pistes de recherche dans le domaine de l'analyse et de l'identification de systèmes physiques réels.

References

- [COL 1941] K.S. COLE, R. H. COLE, R.H., Dispersion and Absorption in Dielectrics - I Alternating Current Characteristics. *J. Chem. Phys.*, 9, 341–352, 1941.
- [GOR 1998] R. GORENFLO, Afterthoughts on interpretation of fractional derivatives and integrals, P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova (Eds.), *Transform Methods and Special Functions*, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.
- [MAI 1998] F. MAINARDI, Considerations on fractional calculus: interpretations and applications, P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova (Eds.), *Transform Methods and Special Functions*, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998.
- [NIG 1992] R. R. NIGMATULLIN, A fractional integral and its physical interpretation, *Theoretical and Mathematical Physics*, Vol. 90, n°3, 1992.
- [RUT 1995] R. S. RUTMAN, On physical interpretations of fractional integration and differentiation, *Theoretical and Mathematical Physics*, Vol.105, N° 3, pp 393-404, 1995.
- [BEN 1997] F. BEN ADDA, Geometric interpretation of the fractional derivative, *Journal of Fractional Calculus*, Vol. 11, pp 21-52, 1997.
- [POD 2002] I. PODLUBNY, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis*, Vol. 5, No 4, pp 357-366, 2002.
- [TEN 2003] J. A. TENREIRO MACHADO, A probabilistic Interpretation of the Fractional-Order differentiation, *Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 6, n. 1, pp. 73-80, 2003.
- [SAM 1993] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, O. I. MARICHEV, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [CAP 2014] E. CAPELAS DE OLIVEIRA, J. A. TENREIRO MACHADO, A review of definitions for fractional derivatives and integral, *Mathematics, Physics and Engineering*, Article ID 238459, 2014.
- [MON 1998] G. MONTSENY, Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. *ESAIM Proc.*, 5, 159–175, 1998.
- [MAT 1998] D. MATIGNON, Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM Proc.*, 5, 145–158, 1998.
- [CAP 1971] M. CAPUTO, F. MAINARDI, Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento* 1, 161–198, 1971.
- [LEM 1983] A. LE MEHAUTE, G. CREPY, Introduction to transfer and motion in fractal media: The geometry of kinetics, *Solid State Ionics*, Volumes 9–10, Part 1, pp17-50, 1983.

- [MET 2000] R. METZLER, J. KLAFTER, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, Vol. 339, n° 1, pp 1-77, 2000.
- [BAR 2000] E. BARKAI, R. METZLER, J. KLAFTER, From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation, *Physical Review E*, Vol. 61, n°1, pp 132-138, 2000.
- [SAB 2021a] J. SABATIER, Fractional Order Models Are Doubly Infinite Dimensional Models and thus of Infinite Memory: Consequences on Initialization and Some Solutions" *Symmetry* 13, no. 6, 1099, 2021.
- [SAB 2021b] J. SABATIER, C. FARGES, Initial value problems should not be associated to fractional model descriptions whatever the derivative definition used, *AIMS Mathematics*, Vol. 6, N° 10, pp 11318-11329, 2021.
- [SAB 2020a] J. SABATIER, Fractional-Order Derivatives Defined by Continuous Kernels: Are They Really Too Restrictive?, *Fractal and Fractional*, Vol 4, n°3, p 40, 2020.
- [SAB 2020b] J. SABATIER, C. FARGES, V. TARTAGLIONE, Some alternative solutions to fractional models for modelling long memory behaviours, *Mathematics*, 8, 196, 2020.
- [SAB 2021c] J. SABATIER, Modelling Fractional Behaviours Without Fractional Models, *Frontiers in Control Engineering*, Vol.2, 2021.
- [SAB 2020c] J. SABATIER, Non-singular kernels for modelling power law type long memory behaviours and beyond, *Cybernetics and Systems*, Vol. 51, N° 4, pp 383-401, 2020.
- [SAB 2020d] J. SABATIER, Fractional state space description: a particular case of the Volterra equation, *Fractal and Fractional*, Vol. 4, N° 23, 2020.
- [SAB 2020e] J. SABATIER, Power Law Type Long Memory Behaviors Modeled with Distributed Time Delay Systems, *Fractal and Fractional*, Vol 4, n°1, 2020.
- [SAB 2020f] J. SABATIER, Beyond the particular case of circuits with geometrically distributed components for approximation of fractional order models: Application to a new class of model for power law type long memory behaviour modelling, *Journal of Advanced Research*, Vol. 25, pp 243-255, 2020.
- [SAP 1988] – B. SAPOVAL, J. N. CHAZALVIEL, J. PEYRIERE, Electrical response of fractal and porous interfaces, *Physical review A*, Vol. 38, n° 11, pp 5867-5887, 1988.
- [TAR 2020] V. TARTAGLIONE, C. FARGES, J. SABATIER, Nonlinear dynamical modeling of adsorption and desorption processes with power-law kinetics: Application to CO2 capture, *Physical Review E*, Vol. 102, p 052102, 2020.
- [TAR 2021] V. TARTAGLIONE, J. SABATIER, C. FARGES, Adsorption on Fractal Surfaces: A Non Linear Modeling Approach of a Fractional Behavior, *Fractal and Fractional*, Vol. 5, p 65, 2021.
- [NIG 2023] R. R. NIGMATULLIN, J. SABATIER, Can Self-Similarity Processes Be Reflected by the Power-Law Dependencies?, *Algorithms*, Vol. 16, p 199, 2023.