

Généralisation de statistiques et d'algèbres destinées au traitement de systèmes fractionnaires

Generalization of statistics and algebras intended for the treatment of self-similar systems

Alain Le Méhauté¹, Laurent Nivanen²

¹ Materials Design SARL and Co, 42 Avenue Verdier, 92120 MONTRouGE (France) alm@materialsdesign.com

² ISMANS-CESI, 44 avenue Bartholdi, 72000 Le MANS (France) lnivanen@ismans-cesi.fr

RÉSUMÉ. Cet article est une brève présentation d'algèbres non additives particulières adaptées aux géométries fractales. Elles sont liées à une généralisation des fonctions exponentielles et logarithmiques en fonction d'un paramètre externe marquant la métrique non entière et la topologie hyperbolique de tores pointés présentant un angle au bord. La relation entre ces opérateurs, ce type d'algèbres, les géométries fractales et les dynamiques sous contrôle d'opérateurs différentiels non entiers est analysée. Les différents aspects des statistiques alors incomplètes sont développés à l'aide des nouveaux opérateurs.

ABSTRACT. This paper is a brief presentation of the so called Non-Extensive Algebra. This algebra is related to the generalization of the exponential and logarithm functions depending on an external parameter. The relationship between these operators & this algebra and fractal geometry & the dynamics under the control of non-integer differential operators is analyzed. The different aspects of the incomplete statistics are developed using the new operators.

MOTS-CLÉS. Dynamiques Fractales, Statistiques Fractionnaires, α -exponentielle, Entropie, Systèmes Ouverts.

KEYWORDS. Fractal Dynamics, Non-Integer Statistics, Entropy, α -exponential, Open systems.

1. Introduction

L'analyse de la relation entre la structure de l'espace-temps et l'opérateur différentiel non entier développée dans de nombreux travaux montre le caractère simpliste du concept de vitesse [LeNi98] susceptible d'être utilement remplacé par la notion de faisceau [VaAr19]. En dépit de son usage paradigmatique, la linéarité de la relation entre l'espace et le temps freine les tentatives de ruptures conceptuelles en physique des systèmes non linéaires, irréversibles et chaotiques. De même, les fonctions exponentielles et logarithmiques, habituellement associées à la représentation d'ensembles séparables, révèlent leurs limites opérationnelles lorsqu'elles sont confrontées à la résolution d'équations différentielles non entières. C'est en particulier le cas de la fonction exponentielle.

Nous considérons dans cette note qui constitue une reprise en français de travaux antérieurs avec le recul historique plus lisibles [NiWa05] la généralisation des fonctions exponentielles et logarithmiques. Ces généralisations abordent à la fois (i) la question de l'algèbre à appliquer pour des ensembles de données multi-connectées, (ii) la question des opérateurs susceptibles d'être utilisés pour manipuler ces données et d'écrire sous une forme simple les lois physiques décrivant les comportements des systèmes complexes.

Nous introduirons dans les deux premiers paragraphes la généralisation des fonctions exponentielles et logarithmiques ainsi que la notion associée d'algèbre non additive. Ces concepts sont utiles à la simplification du formalisme mathématique des ensembles non séparables. Dans le paragraphe 3, nous développons la relation entre ce nouveau formalisme et le caractère fractionnaire caractérisant les systèmes complexes. Dans le paragraphe 4, nous présenterons quelques aspects généraux de l'approche non extensive de l'information et de la statistique (NIST) initiés à Gaithersburg en 1983 [NIST83]. Les échanges avec B. Mandelbrot et E.W. Montroll ont été l'un des germes de l'analyse entropique qui suit. L'entropie ici dynamique est introduite à la manière de

Shannon en utilisant le logarithme généralisé et les fonctions exponentielles singularisées ainsi qu'une algèbre alors adaptée.

2. Une algèbre généralisée adaptée aux systèmes complexes

2.1. Besoin d'un concept d'exponentielle généralisée

L'étude des systèmes complexes pose naturellement la question de la généralisation de la fonction exponentielle. Cette nécessité apparaît à la fois dans le domaine des fonctions de transfert et de la mécanique statistique.

Les dynamiques les plus simples observées dans la nature sont représentées par des équations différentielles dites du premier ordre. Ils apparaissent en mécanique (modèles Kelvin-Voigt ou Maxwell) comme en électrodynamique. Par exemple, un circuit parallèle résistance - condensateur (Figure 1.a) est régi par une équation différentielle du premier ordre tension $u(t)$ versus courant $i(t)$ équipée de coefficients constants. Un tel système peut être facilement caractérisé par la manière dont il réagit à des sollicitations spécifiques. La réponse impulsionnelle correspond à un courant $i(t) = I_0 H(t)$, où H est la fonction échelon d'Heaviside. Dans ce cas, la réponse n'est autre que la fonction exponentielle temporelle. La réponse à un signal sinusoïdal est liée à une fonction de transfert, ou impédance, donnée dans le Tableau 1, où $Z_0 = R$ et $\tau = RC$. Cette fonction peut être représentée dans le plan de Nyquist par un demi-cercle centré sur l'axe des abscisses (Figure 1.b). Lorsque le comportement électrique ou mécanique de systèmes complexes (électrodes de batterie, élastomères, viscosité de polymères) est étudié expérimentalement, il est possible d'introduire une fonction de transfert de type Cole-Cole. La représentation de Nyquist est maintenant un arc de cercle centré à l'extérieur de l'axe des x (Figure 2.b) [LeNi98] [NiLe00]. C'est en suivant le chemin inverse à celui-ci dessus que la notion de « fractance » a été introduite il y a maintenant plus de 40 ans [CrLe83] [CrLe82] [LeNi00] (Figure 2.a)

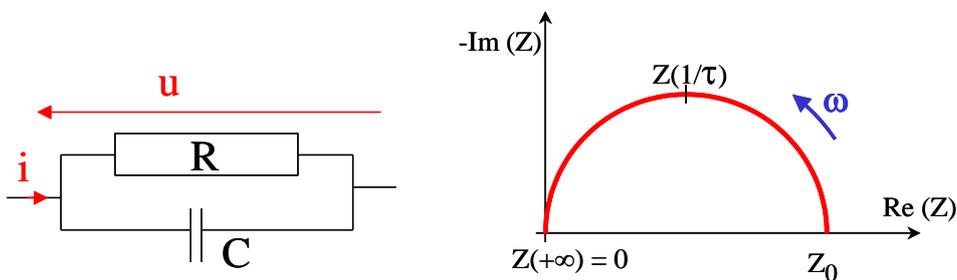


Figure 1. a) Circuit électrique RC, b) Représentation de la fonction de transfert dans le plan de Nyquist

Le système est alors régi par une équation différentielle fractionnaire (en fait d'ordre réel) (tableau 1). Cependant, faute de transformation de Fourier inverse, la réponse impulsionnelle en termes de fonctions d'une unique variable temporelle ne peut être déterminée.

Process	ODE	Pulse Response $u(t)$	Transfer Function $Z(\omega)$	
First order	$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$	$RI_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \tau = RC$	$\frac{Z_0}{1 + i\omega\tau}$	$\tau = RC$ $Z_0 = R$
Real order	$i = \frac{u}{R} + C' \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha}$	La temporalité perd toute signification	$\frac{Z_0}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, 0 < \alpha < 1$	$RC' = \tau^\alpha$ $Z_0 = R$

Tableau 1. Elément de description d'un processus de premier ordre et mise en regard d'un processus standard d'ordre fractionnaire et réel équivalent : Equation différentielle et fonctions de transfert.

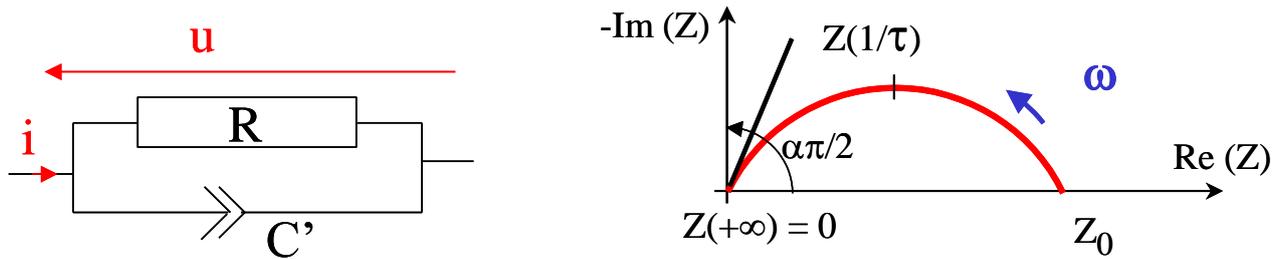


Figure 2. a) R-fractance pour un circuit électrique de base. b) Schéma de la fonction de transfert dans le plan de Nyquist.

	Probability p_i	Partition function Z	Entropy S
BGS	$\sum_i e^{-\beta E_i} / Z$	$\sum_i e^{-\beta E_i}$	$-k \sum_i p_i \ln p_i$
NE	$\sum_i [1 - (1-q)\beta E_i]^{1/(1-q)} / Z$	$\left(\sum_i [1 - (1-q)\beta E_i]^{q/(1-q)} \right)^{1/q}$	$-k \sum_i p_i^q \frac{p_i^{1-q} - 1}{1-q}$
	$e_{1-q}^{-\beta E_i} / Z$	$\left[\sum_i \left(e_{1-q}^{-\beta E_i} \right)^q \right]^{1/q}$	$-k \sum_i p_i^q \ln_{1-q} p_i$

Tableau 2. Quantités physiques (distributions de probabilité, fonctions de partition, entropies) suggérées par la physique statistique standard (Respectivement à partir du formalisme de Boltzmann et d'une statistique ouverte pour les systèmes non additifs) (Tableaux 6 et 7).

2.2. Fonctions généralisées

2.2.1. Définition

Une possibilité offerte pour surmonter cette absence de temporalité est de considérer des expressions analytiques dérivées de la mécanique statistique non extensive (NE), qui généralisent la formulation conventionnelle de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) [TsaC80] [TsaC01] [WaQa01]. Celle-ci sera développée plus loin dans cette note. Nous nous concentrons ici uniquement sur certains aspects mathématiques éclairants. Lorsque l'on considère uniquement les cas canoniques, la distribution exponentielle de probabilité apparaît généralisable à une distribution en loi de puissance (Tableau 2 – deuxième rang). Il en est de même pour la fonction de partition Z et pour l'entropie exprimée au moyen de la probabilité. Cette propriété suggère d'introduire des fonctions exponentielles et logarithmiques généralisées [NiLe03] :

$$e_a^x = (1 + ax)^{1/a}, \ln_a x = \frac{x^a - 1}{a}, a \neq 0 \quad [1]$$

Pour la fonction exponentielle, x est choisi de sorte que $1 + ax > 0$ si $a < 0$ et $1 + ax \geq 0$ si $a > 0$. En ce qui concerne la fonction logarithme, on doit vérifier $x > 0$ si $a < 0$ et $x \geq 0$ si $a > 0$.

2.2.2. Propriétés algébriques

Les quantités thermodynamiques précédentes sont maintenant facilement exprimées en termes d'opérateurs généralisés en utilisant l'argument $a = 1 - q$, où q est un index de non additivité. (voir Tableau 2). Dans la limite $a \rightarrow 0$, l'exponentielle standard ainsi que la fonction logarithme sont retrouvées. On représente ces nouvelles fonctions dans les Figures 3 et 4. Pour chaque ensemble, a varie de -1 à 2 par pas de $1/2$. Les courbes noires en gras représentent les fonctions standard \exp et \ln ($a = 0$) et les lignes droites ($a = 1$).

2.2. Opérateurs généralisés

2.3.1. Morphismes usuels

Les fonctions exponentielles et logarithmiques habituelles vérifient des propriétés de morphisme remarquables. Ils sont capables d'établir un lien entre les opérateurs d'addition et de produit. Par exemple, la fonction exponentielle est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (\mathbb{R}_+^*, \times) . Par dualité, la fonction logarithme est un morphisme de (\mathbb{R}_+^*, \times) vers $(\mathbb{R}, +)$. Il en résulte que :

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad [2]$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad [3]$$

Une illustration géométrique est donnée pour les deux opérateurs sur la figure 5. Les opérateurs d'addition et de produit sont représentés dans des plans parallèles (respectivement plan avant, caractères gras et plan arrière, caractères italiques). La propriété de morphisme implique une fonction et deux opérateurs, et révèle la possibilité d'obtenir le même résultat de deux manières différentes.

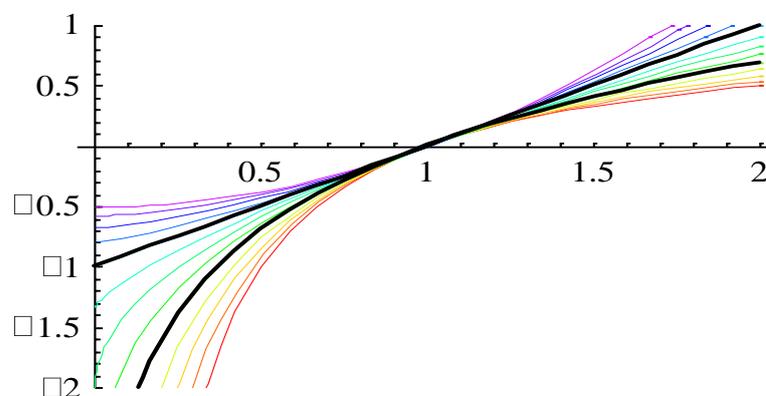


Figure 3. a) Graphes des fonctions \ln_a . a varie de -1 (courbe rouge, bas) à 2 (courbe violette, haut).

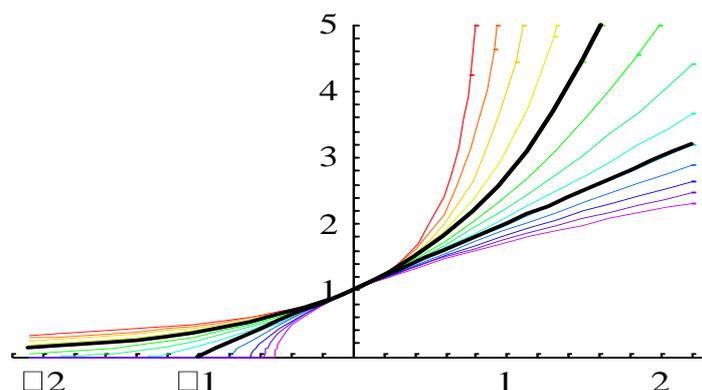


Figure 4. a) Graphes des fonctions e_a^x . a varie de la valeur -1 (courbe rouge, haut) à 2 (courbe violette, bas).

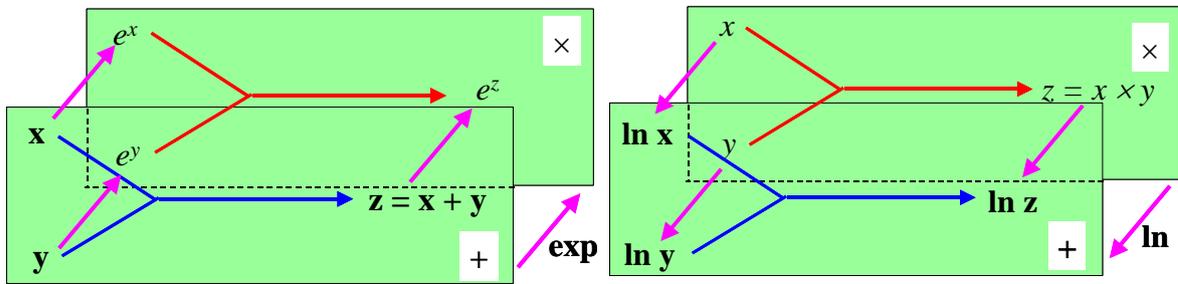


Figure 5. Représentation 3D pour les morphismes standards et les opérateurs (+, x). a) fonctions exponentielles et (b) logarithmes.

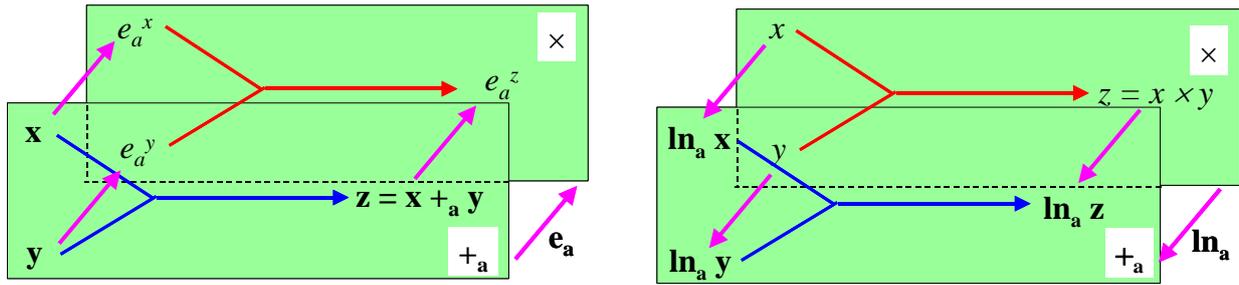


Figure 6. Représentation 3D pour les morphismes non-standards et les opérateurs (+_a, x). a) fonctions exponentielle et (b) logarithme généralisées

Dans le cas

- L’exponentielle additionne deux nombres réels x et y, puis applique l’opérateur exponentiel.
- Applique séparément deux opérateurs à x et y, puis multiplie les nombres réels e^x et e^y .

Les deux morphismes ne sont évidemment pas indépendants. Du fait de la dualité entre l’exponentielle et le logarithme, ils se déduisent réciproquement. Soit encore en introduisant $x = e^X$ et $y = e^Y$ dans (3), puis en appliquant l’opérateur exponentiel, on obtient l’équation (2) en termes de variables X et Y.

2.3.2. Définition des opérateurs généralisés

Ces propriétés ne peuvent en aucun cas être généralisées par simple substitution de e^x par e_a^x (resp. $\ln x$ par $\ln_a x$) dans (2) et (3). Le calcul détaillé des membres de gauche et de droite conduisent pour les équations (2) et (3) à :

$$e_a^{x+y} = \left((e_a^x)^a + (e_a^y)^a - 1 \right)^{1/a} \tag{4}$$

$$e_a^x \cdot e_a^y = e_a^{x+y+axy} \tag{5}$$

$$\ln_a(x \cdot y) = \ln_a(x) + \ln_a(y) + a \ln_a(x) \ln_a(y) \tag{6}$$

$$\ln_a(x) + \ln_a(y) = \ln_a \left((x^a + y^a - 1)^{1/a} \right) \tag{7}$$

$$x +_a y = x + y + axy \tag{8}$$

$$x \times_a y = (x^a + y^a - 1)^{1/a} \tag{9}$$

Les équations (5) et (7) peuvent évidemment être réécrites avec l’aide des opérateurs généralisés :

$$e_a^{x+_a y} = e_a^x \cdot e_a^y$$

[10]

$$\ln_a(x \times_a y) = \ln_a(x) + \ln_a(y)$$

[11]

Soit :

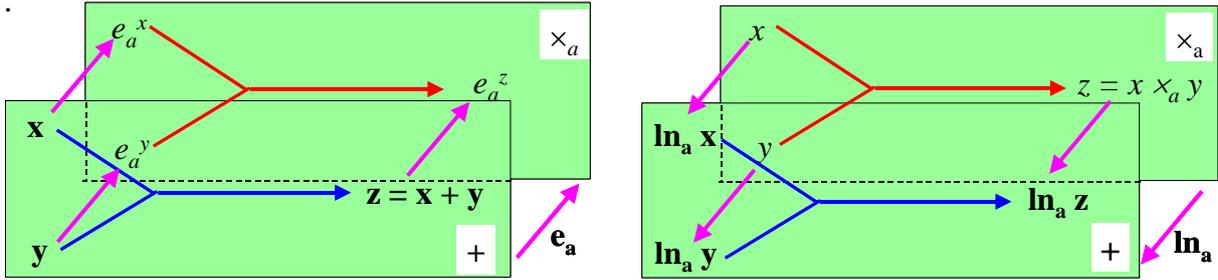


Figure 7. Représentation 3D des propriétés des morphismes pour les fonctions et opérateurs généralisés (+, \times_a). a) Fonction exponentielle, (b) Fonction logarithme.

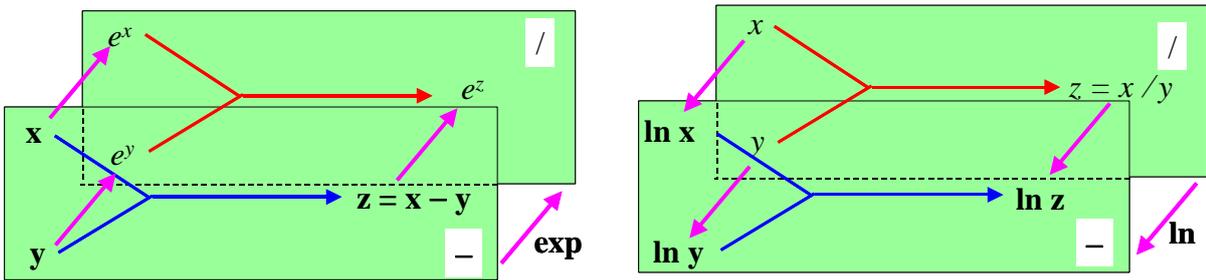


Figure 8. Représentation 3D des propriétés des morphismes pour les fonctions standard exp et ln avec les opérateurs {-, /}.

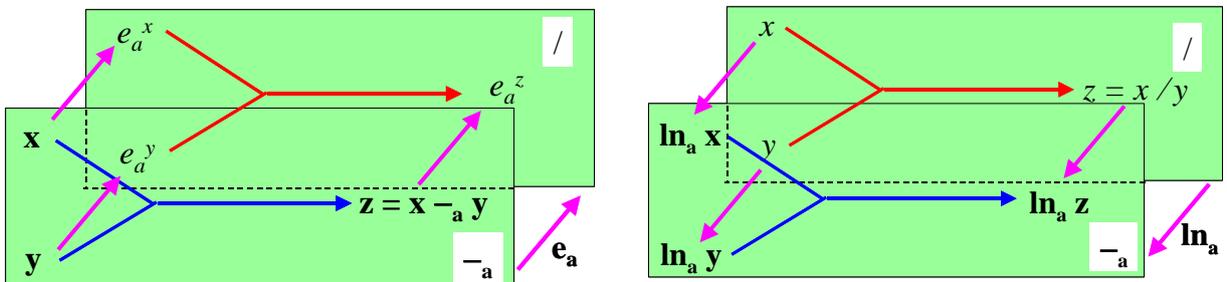


Figure 9. Représentation 3D des propriétés des morphismes pour les fonctions exponentielle et logarithme généralisées avec les opérateurs {-a, /}.

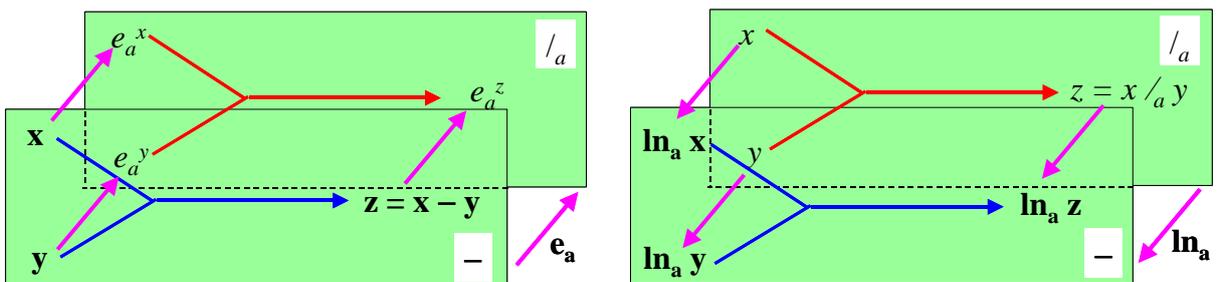


Figure 10. Représentation 3D des propriétés des morphismes pour les fonctions exponentielle et logarithme généralisées avec les opérateurs {-, /_a}.

Mais nous pouvons également observer que les équations (4) et (6) peuvent aussi être exprimées avec la même classe d'opérateurs :

$$\ln_a(x \cdot y) = \ln_a(x) +_a \ln_a(y) \tag{12}$$

$$e_a^{x+y} = e_a^x \times_a e_a^y \tag{13}$$

2.3.3. Propriétés des nouveaux morphismes

Les fonctions et opérateurs généralisés vérifient maintenant quatre propriétés de morphisme. Notons D_a l'ensemble de définition de la fonction e_a^x . Il résulte de l'équation (WhGW78) que la fonction exponentielle généralisée est un morphisme de $(D_a, +_a)$ dans (\mathbb{R}_+^*, \times) . Le même opérateur $+_a$ apparaît dans (12), ce qui prouve que la fonction logarithme généralisée est aussi un morphisme de (\mathbb{R}_+^*, \times) dans $(D_a, +_a)$. Comme dans le cas standard, les équations (10) et (12) peuvent donc être couplées, du fait de la propriété de dualité entre les fonctions exponentielles et logarithmes généralisées. En introduisant $x = e_a^X$ et $y = e_a^Y$ dans (12), et en appliquant la fonction exponentielle généralisée, on obtient l'équation (10) en fonction des variables X et Y . Ces propriétés sont illustrées sur la figure 6. De même, les propriétés de morphisme (13) et (11) font intervenir le couple d'opérateurs généralisés $(+, \times_a)$. Ces propriétés sont illustrées sur la Figure 7. Comme l'addition et le produit, les opérateurs généralisés de soustraction (noté $-_a$) et de division (noté $/_a$) peuvent être définis. Si l'on note :

$$x -_a y = \frac{x - y}{1 + ay}, \quad x /_a y = (x^a - y^a + 1)^{1/a} \tag{14}$$

Il en résulte que les relations suivantes sont vérifiées :

$$e_a^{x -_a y} = e_a^x / e_a^y, \quad \ln_a(x /_a y) = \ln_a(x) -_a \ln_a(y) \tag{15}$$

$$\ln_a(x /_a y) = \ln_a(x) - \ln_a(y), \quad e_a^{x - y} = e_a^x /_a e_a^y \tag{16}$$

	Operator $+_a$	Operator \times_a
Commutativity	$x +_a y = y +_a x$	$x \times_a y = y \times_a x$
Associativity	$(x +_a y) +_a z = x +_a (y +_a z)$	$(x \times_a y) \times_a z = x \times_a (y \times_a z)$
Neutral element	$x +_a 0 = 0 +_a x = x$	$x \times_a 1 = 1 \times_a x = x$
Absorbing element	$x +_a (-1/a) = (-1/a) +_a x = -1/a.$	$x \times 0 = 0 \times x = 0$ (only if $a = 0$)

Table 3. Vérification des propriétés algébriques usuelles pour les nouveaux opérateurs. Les réels x, y, z sont choisis de façon à ce que tous les produits puissent être définis.

	Opposite $-_a$	Inverse $/_a$
Link with operators	$x -_a y = x +_a (-_a y)$	$x /_a y = x \times_a (1/_a y)$
Sign rule	$-_a (-_a x) = +_a (+_a x) = x$ $-_a (+_a x) = +_a (-_a x) = -_a x$	$1/_a (1/_a x) = x$

Table 4. Introduction de la notation opposée et inverse. Cette notion est compatible avec les quatre opérateurs généralisés.

Ces relations généralisent de deux manières les propriétés de morphismes standards :

$$e^{x-y} = e^x / e^y, \ln(x/y) = \ln x - \ln y \quad [17]$$

Les propriétés de morphisme (15) et (16) généralisent de deux manières la propriété standard. Les fonctions standards sont remplacées par des fonctions généralisées. Le couple de $(-, /)$ est remplacé par les deux couples $(-, /_a)$ dans (15) et $(-, /_a)$ dans (16). Ces propriétés sont illustrées sur les figures 8, 9, 10. Le prochain chapitre est dédié à la présentation de certaines propriétés intéressantes des opérateurs généralisés.

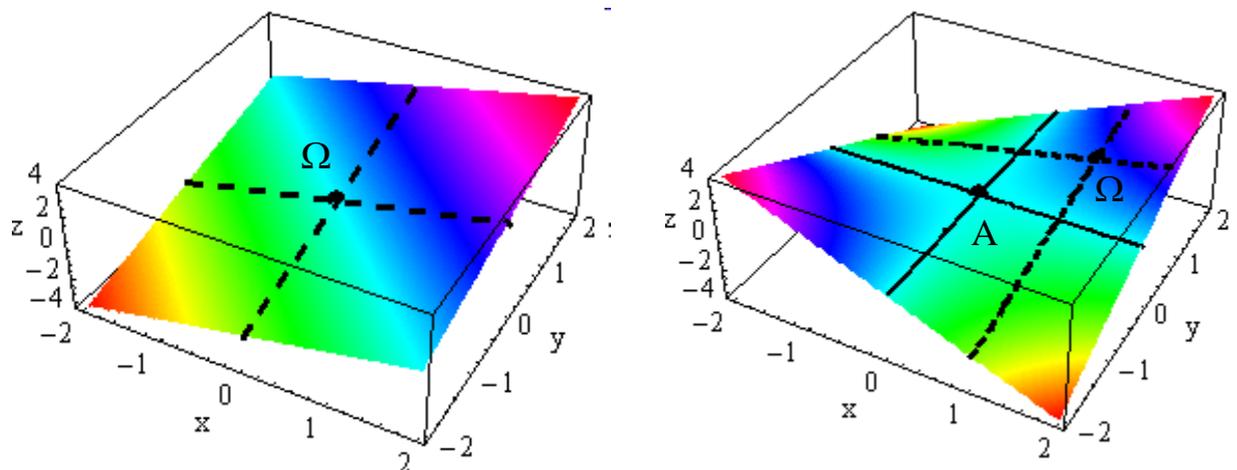


Figure 11. Représentation 3D des opérateurs standards a) addition, b) produit sur le domaine.

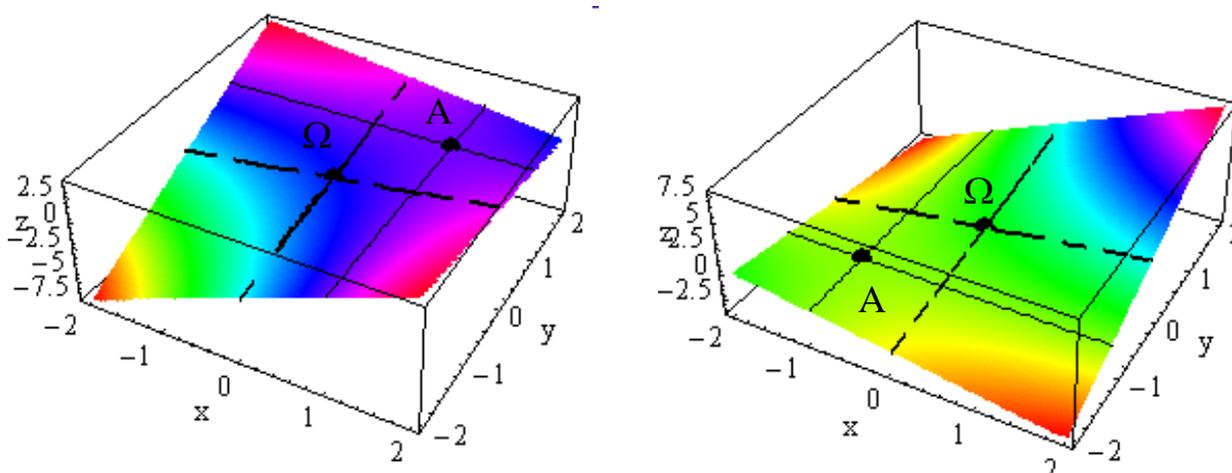


Figure 12. Représentation 3D des opérateurs $+_a$, a) $a = -1$, b) $a = 1$.

2.4. Propriétés des opérateurs généralisés

Nous étudions si certaines propriétés des opérateurs usuels $+$ et \times restent vérifiées pour les opérateurs généralisés.

2.4.1. Addition. Co-produit

En considérant l'opérateur d'addition, les propriétés suivantes peuvent être démontrées :

- associativité, commutativité, 0 reste l'élément neutre (Tableau 3),

- $x_0 = -1/a$ est un élément absorbant (Tableau 3), il s'agit d'une caractéristique émergente.

- si $x \neq x_0$, le réel x possède un élément opposé $-_ax : -_ax = -x/(1 + ax)$. Remarquons que cette définition est compatible avec les équations (8) et (14) (Tableau 4). Le réel x_0 n'a pas d'élément opposé car il s'agit de l'élément absorbant pour l'addition généralisée.

- les règles de signalisation peuvent être étendues (tableau 4).

2.4.2. Produit

Pour une valeur de a donnée, on peut observer à partir de l'équation (9) que le produit $x \times_a y$ est défini de manière non ambiguë si $x, y > 0$ et si l'inégalité $x^a + y^a > 1$ est vérifiée.

Lorsque tous les produits sont définis, les propriétés suivantes sont vérifiées pour l'opérateur du produit :

- associativité, commutativité, 1 est élément neutre (Tableau 3),
- Il n'y a pas d'élément absorbant. Le produit étant défini, il n'y a aucune valeur de y qui vérifie $x \times_a y = y$ pour tout x .
- x possède un inverse noté $1/_ax = (2 - x^a)^{1/a}$. En particulier on peut observer que si $a > 0$, alors $1/_a0 = 2^{1/a}$ et $1/_a(2^{1/a}) = 0$. Ainsi 0 a un inverse fini dans l'algèbre étendue ! Cette définition est compatible avec les équations (9) et (14) (Tableau 4),
- la règle du « signe » peut aussi être étendue (Tableau 4).

2.4.3. Représentation

Un opérateur peut être traité comme une fonction réelle de deux variables d'entrée $z = f(x, y)$. La représentation est très naturellement une surface $S \subset \mathbb{R}^3$. Par exemple, les opérateurs d'addition standard et de produit sont représentés sur la figure 11. Les couleurs représentent les valeurs de la fonction (axe z). Les lignes droites en pointillés correspondent à l'axe neutre Δ_x et Δ_y dans S , avec pour intersection Ω . $S(+)$ est un plan. Δ_x et Δ_y sont définis respectivement par $z = x + 0 = x$ et $z = 0 + y = y$. $S(\times)$ est un paraboloïde hyperbolique. Δ_x et Δ_y sont respectivement définis par $z = x.1 = x$ et $z = 1.y = y$. Les droites Δ'_x et Δ'_y sont respectivement définis par $z = x.0 = 0$ et $z = 0.y = 0$. Du fait de la présence de l'élément absorbant, Δ'_x et Δ'_y coïncident respectivement avec les axes x et y . Ils se coupent au point selle A .

La surface de la Figure 12, associée à l'addition généralisée est représentée dans le cas où $a = -1$ et $a = 1$. $S(+, -1)$ et $S(+, 1)$ sont des paraboloïdes hyperboliques. Ils présentent des points selles en $A = \{-1/a, -1/a, -1/a\}$, point d'intersection entre les droites horizontales Δ'_x et Δ'_y . La similitude entre $S(\times)$ et $S(+, a)$ a pour origine la relation:

$$(x - 1/a) +_a (y - 1/a) = axy - 1/a \quad [18]$$

On obtient $S(+, a)$ en appliquant à $S(\times)$ une translation de vecteur $(-1/a, -1/a, -1/a)$ puis une expansion de ratio égale à a le long de l'axe z . Pour représenter la surface $S(\times, a)$ associée au produit généralisé, il faut être prudent car le produit n'est défini que sur le domaine $D = \{(x, y), x > 0, y > 0, x^a + y^a > 1\}$. Sur la Figure 13, ces domaines ont été représentés en choisissant a égal à $-1/2, 1/2, 1, 3/2$ successivement. $a = 1$ est spécifique mais toutes les autres valeurs correspondent aux cas généraux respectifs $a < 0, 0 < a < 1$ et $a > 1$. Le domaine D est limité par trois frontières : $B_1 (x = 0)$, $B_2 (y = 0)$, et $B_3 (x^a + y^a = 1)$. Pour ce qui concerne la figure 14, les représentations des surfaces $S(\times, a)$ associées au produit généralisé sont données avec la même valeur de a . La ligne pointillée correspond aux axes neutres Δ_x et Δ_y inscrits dans $S(\times, a)$, avec pour intersection $\Omega = \{1, 1, 1\}$. On définit les courbes Δ'_x et Δ'_y respectivement à partir de $z = x \times_a 0$ et $z = 0 \times_a y$. Comme il n'existe

pas d'élément absorbant pour le produit généralisé quand $a > 0$, Δ'_x et Δ'_y ne correspondent pas aux axes x et y . Si $a < 0$, le produit $x \times_a y$ est nul sur B_1 et B_2 , mais diverge sur B_3 . A l'opposé, si $a > 0$, le produit $x \times_a y$ est nul sur B_3 . Sur chaque point de B_3 , le plan tangent est horizontal si $0 < a < 1$, et vertical si $a > 1$. Plus avant, on remarquera que la surface $S(x,1)$ est plane.

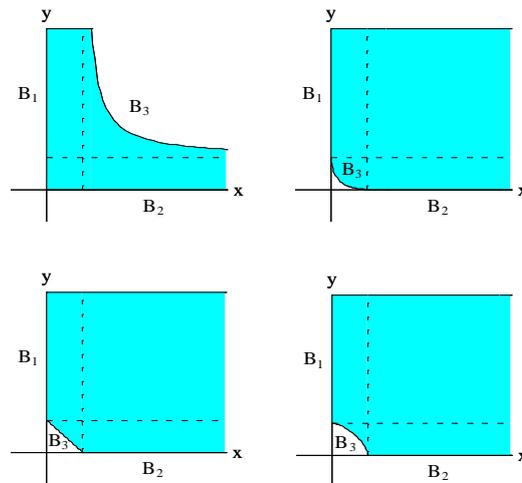


Figure 13. définition des domaines pour le produit x_a , a) $a = -1/2$, b) $a = 1/2$. c) $a = 1$. d) $a = 3/2$.

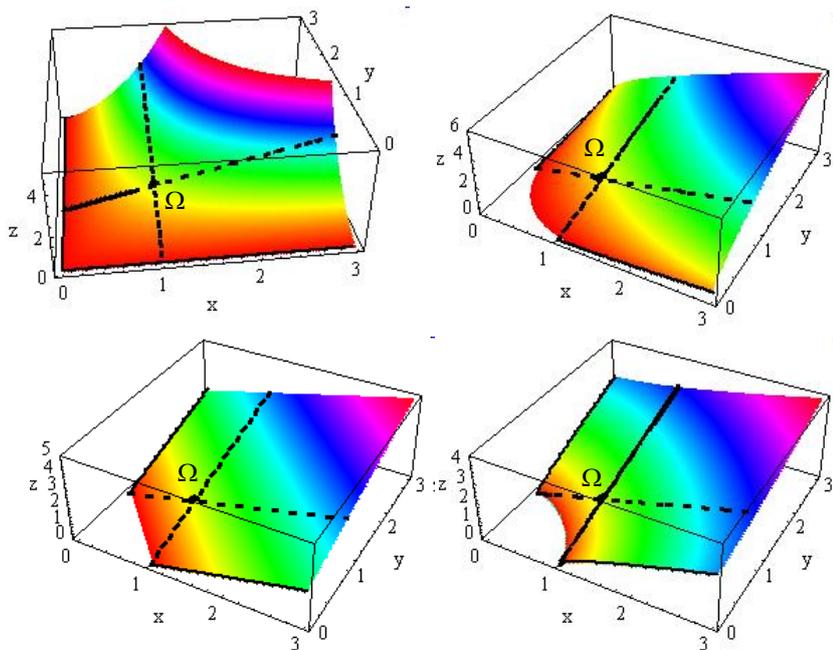


Figure 14. représentation 3D du produit x_a , a) $a = -1/2$, b) $a = 1/2$. c) $a = 1$. d) $a = 3/2$.

2.4.4. Distributivité

Une autre caractéristique importante de la nouvelle algèbre est la disparition de la loi de distributivité. Avec les opérateurs standards, cette loi s'exprime ainsi :

$$xy + xz = x(y + z) \quad [20]$$

Lorsque des opérateurs étendus sont considérés, aucune combinaison n'est satisfaite, sauf cas particuliers comme $x = 1$. Au contraire, en général :

$$x \times_a y + x \times_a z \neq x \times_a (y + z) \quad [21]$$

$$xy +_a xz \neq x(y +_a z) \quad [22]$$

$$x \times_a y +_a x \times_a z \neq x \times_a (y +_a z) \quad [23]$$

Ces propriétés ont des conséquences importantes. En mathématiques, la manipulation des expressions (développement, factorisation) devient difficile. Du point de vue physique, il n'est pas possible d'étudier un système par une simple décomposition en sous-systèmes et addition des propriétés de chaque sous-système. Cette algèbre est donc associée à des systèmes non additifs, avec d'une part le produit par a :

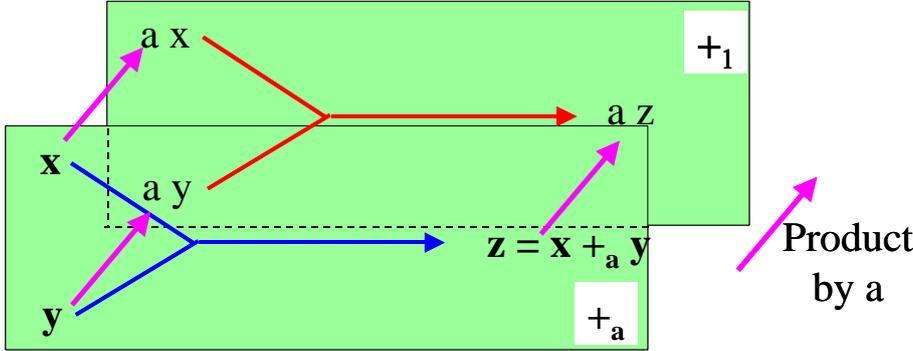


Figure 15. Représentation 3D du rôle générateur de l'opérateur +₁ parmi les opérateurs +_a.

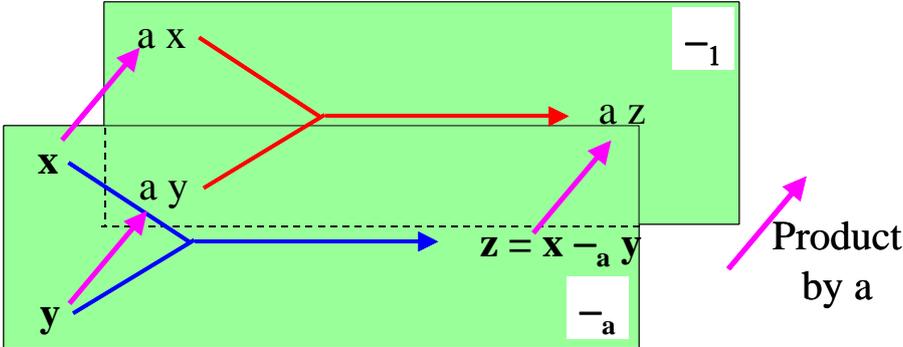


Figure 16. Représentation 3D du rôle générateur de l'opérateur -₁ parmi les opérateurs -_a.

puis la puissance par a

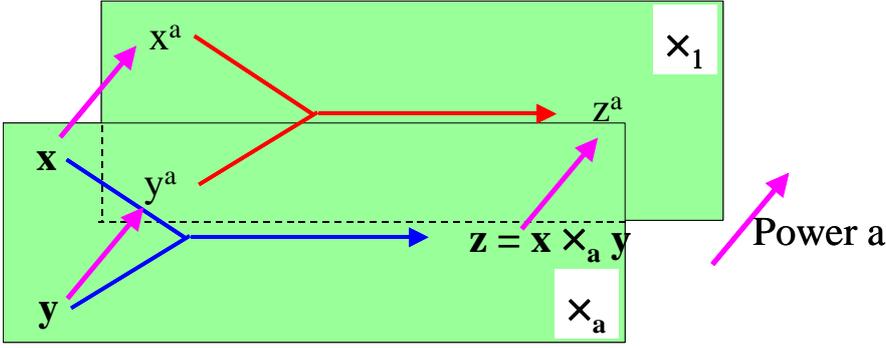


Figure 17. Représentation 3D du rôle générateur de l'opérateur x₁ parmi les opérateurs x_a.

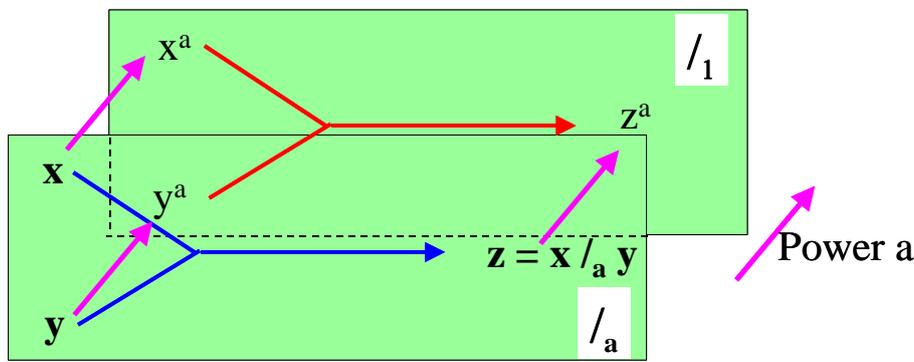


Figure 18. Représentation 3D du rôle générateur de l'opérateur /1 parmi les opérateurs /a.

2.4.5. Valeurs de a spécifiques

Parmi les nouveaux opérateurs certains d'entre eux présentent des propriétés génériques :

$$a(x +_a y) = (ax) +_1 (ay) ; a(x -_a y) = (ax) -_1 (ay) \quad [24]$$

Une illustration géométrique de la première relation est donnée par la figure 15. Les opérateurs $+_a$ et $+_1$ sont appliqués à l'intérieur de plans parallèles (respectivement plan avant, caractères gras et plan arrière, caractères italiques). La liaison entre les plans provient du produit standard par a . Sur la Figure 16, le même lien est illustré entre les opérateurs $-_a$ et $-_1$. Cela signifie que parmi les opérateurs $+_a$ et $-_a$ les opérateurs, $+_1$ et $-_1$ jouent un rôle générique. Toute addition (resp. soustraction) généralisée peut être exprimée en termes d'addition (resp. soustraction) généralisée du paramètre 1 et de produit standard par a .

Le produit généralisé et la division vérifient des propriétés génératrices équivalentes :

$$(x \times_a y)^a = (x^a) \times_1 (y^a) ; (x /_a y)^a = (x^a) /_1 (y^a) \quad [25]$$

De la même manière que précédemment, ces relations sont illustrées sur les figures 17 et 18. Tout produit généralisé (resp. division) peut être exprimé en termes de produit généralisé (resp. division) du paramètre 1 et d'élévation à la puissance a .

3. Lien entre les algèbres généralisées et les opérateurs non entiers

3.1. Fonctions exponentielles et discrimination entre deux ensembles

Les principales opérations de l'algèbre standard sont l'addition et la multiplication -évidemment les opérations inverses (soustraction et division). En théorie des ensembles, la multiplication est associée à l'opérateur 'et' (\cap) tandis que l'addition est associée à l'opérateur 'ou' (\cup). Il existe donc une forte corrélation entre l'utilisation de ces opérateurs et notre capacité à discriminer deux ensembles différents. Cette capacité étant l'étape majeure de toute analyse cartésienne considérée sous sa forme la plus élémentaire dans le cadre de la théorie des ensembles sous axiomes ZFC, tout obstacle dans la voie de la discrimination -c'est-à-dire entre fusion et/ou ségrégation- est un obstacle de l'analyse la plus traditionnelle. Compte tenu du rôle de l'exponentielle et du logarithme dans l'homomorphisme entre addition et multiplication, la généralisation de ces fonctions pour des systèmes complexes non séparables puis non extensifs doit être considérée avec intérêt sans sous-estimer les difficultés épistémologiques qu'un tel saut conceptuel représente.

Par exemple, lors de la résolution d'une équation différentielle, le rôle principal joué par les séries exponentielles est de donner une solution globale via l'intégration à partir de caractéristiques locales. La séparation claire entre le comportement local et global et les conditions aux limites expliquent l'importance du rôle des deux fonctions. Pratiquement ces fonctions permettent de changer de point de vue afin de *discriminer, pour un certain ensemble de données et de paramètres*, deux ensembles de données partiellement fusionnés. Mais, par exemple, un ensemble de nœuds ou d'anneaux présentant des caractéristiques énantiomères (chimie) permettent de mesurer les limites de nos intuitions quant à l'utilisation trop systématique de ces fonctions : toute discrimination nécessite un découpage « externe » d'ensemble et donc la disparition de l'efficacité de la fonction exponentielle. Dans cette perspective, il faut rappeler que la prééminence de la fonction exponentielle a déjà été remise en question alors que les ingénieurs s'attachaient à résolution d'équations différentielles non entières pour aborder des problèmes de transfert d'énergie en milieu hétérogène [LeNi98].

Cette publication veut introduire les opportunités ouvertes par la généralisation algébrique et les fonctions généralisées pour représenter et gérer des ensembles complexes et les dynamiques qui peuvent y être attachées.

3.2. Fonctions exponentielles cercles et singularités

Nos difficultés pratiques à maîtriser et manier les singularités plongées dans l'espace euclidien sont bien connues en physique. Les mathématiciens résolvent ces questions en utilisant des techniques d'arrondis, d'approximations des singularités à l'aide d'une boucle, d'un lasso, de techniques de discrétisation comme la théorie de l'homotopie ou l'angle résiduel du transport parallèle est lié à la courbure [LeNi98] [LeMe90]. La taxonomie des chemins le long de toutes les boucles possibles et les distorsions de celles-ci donnent des informations sur leurs significations vis-à-vis du contexte. Pratiquement, le cercle est la boucle la plus simple qui puisse être conçue. Il offre des propriétés topologiques mais aussi analytiques très simples particulièrement intéressantes à exploiter :

- Le cercle est l'inversion d'une droite par rapport à une singularité, de sorte que la singularité doit être assimilée à un point à l'infini.
- L'inversion analytique doit être écrite dans le plan complexe et cette opération fait naturellement apparaître la fonction exponentielle via une transformée de Fourier inverse

$$(1/z \propto 1 + i\omega\tau ; z \propto \frac{1}{1 + i\omega\tau} \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} \exp(-t/\tau)).$$

- En utilisant la variable complexe $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, nous faisons naturellement apparaître l'équation d'un cercle. C'est pourquoi la théorie des fonctions complexes fait naturellement ressortir des propriétés attachées aux singularités.
- En théorie de la mesure, le disque (boule de mesure) porte en lui incertitudes et probabilités.

Ces propriétés sont classiques mais on peut montrer au-delà [LeNi98] [LeMe90] que lorsqu'il est découpé en sections, un disque, donc les arcs de cercles qui le bordent alors, fait apparaître de nombreuses propriétés topologiques supplémentaires. Il offre par exemple des possibilités de lier la généralisation exponentielle étudiée dans les chapitres précédents à la géométrie fractale, aux théories de mesures non extensives aux opérateurs différentiels non entiers, etc (Voir ouvrage complet référence [NiWa05]). Nous illustrerons la pertinence de ces remarques par une extension possible des statistiques à des probabilités non additives.

3.3. Géométrie fractale, loi de puissance et généralisation statistique

Par la récursivité de sa construction et de ses propriétés, une structure fractale est l'archétype physique de milieux complexes plongés dans l'espace. De telles structures sont caractérisées par une relation fondamentale ici appelée relation de Mandelbrot : $N\eta^d \propto 1$, où 'd' est appelée la dimension fractale. Quand $d = 1$, cette loi basée sur une simple multiplication, exprime la relation inverse entre l'échelle η et le nombre de pièces N comptées le long d'une ligne polygonale. Cette approche peut être étendue dans un espace abstrait de dimension entière supérieure. Lorsque 'd' n'est pas entier, la situation change radicalement, des caractéristiques non standards apparaissent. Elles résultent de l'inadaptation de l'algèbre habituelle utilisant comme assise les relations linéaires addition/multiplication. La décomposition sur une base de fonctions offrant les mêmes types de propriétés utiles que l'exponentielle (base de la fonction d'onde) se trouve mise en échec. L'un des principaux outils de la physique et de l'ingénierie est rendu caduc. Illustrons cette inadaptation avec l'exemple d'un jeu de N cartes. La probabilité de sortir du jeu une carte spécifique est donnée habituellement par $P_i = 1/N$ (cas équiprobable). Mais maintenant supprimons n cartes dans l'ensemble des N . L'ensemble initial devient incomplet. Cette opération lève la dégénérescence entre deux probabilités liées : la probabilité de prendre une carte spécifique dans le jeu initial $P_i = 1/N$ et la probabilité p_i de prendre une carte parmi celles qui restent $p_i = 1/(N - n)$. Une vue schématique de la distribution de probabilité (Figure 19) montre que p_i joue un rôle semblable à celui des

échelles η préalablement définies sur des géométries fractales. On peut écrire ici $\sum_{\{N\}} \frac{1}{N} = \sum_{\{N\}} p_i^d = 1$

L'analogie est parfaite entre problématique fractale et statistiques incomplètes au sein d'une distribution initiale homogène de probabilité. Lorsque la distribution n'est pas équiprobable, le procédé peut encore s'appliquer, mais comme $p_1/p_2 \neq p_1^d/p_2^d$, la structure des algèbres est plus complexe. Nous avons maintenant l'intention de montrer comment les statistiques, les exponentielles et l'algèbre généralisées associées sont fortement liées à cette propriété.

3.4. Statistique, thermodynamique fractionnaire et généralisation des opérateurs algébriques

Pour ce faire, nous avons déjà proposé une version fractale de l'information non extensive et d'une théorie statistique généralisée (NIST [WaQA01] [NiLe03]). L'idée de base est de conserver la définition de probabilité habituelle dans l'espace de phase fractal, c'est-à-dire la probabilité p_i d'un petit élément de l'espace des phases est proportionnel au volume de cet élément. Comme indiqué ci-dessus, en raison de la fractalité, cette probabilité ne peut pas être normalisée de la manière habituelle (ensemble ouvert). Une normalisation incomplète ou ouverte apparaît cependant pouvoir s'écrire :

$$\sum_{i=1}^w p_i^q = 1 \quad [26]$$

avec $q = d_f/d$ pour un objet fractal de dimension d_f immergé dans d dimension homogène de l'espace de phase.

Le point de départ de la théorie dite de l'information et des statistiques non extensives (NIST) est l'entropie ou l'information de Tsallis [TsaC80]. Cette théorie a été rapidement reconnue comme une théorie possible pour les systèmes complexes montrant des phénomènes souvent liés à la distribution de la loi de puissance (voir la forme analytique de l'exponentielle généralisée et du logarithme) et à la géométrie fractale qui ne peuvent être comprises avec les statistiques conventionnelles de Boltzmann-Gibbs basées sur l'entropie de Shannon. (BGS). Le lecteur est renvoyé à [TsaC01] pour des commentaires généraux et des références.

L'entropie de Tsallis liée à un q-logarithme est clairement une généralisation de l'entropie de Shannon donnée par la fonctionnelle logarithme usuelle. L'utilité de la statistique fractionnaire a

également été prouvée en obtenant des fonctions de distribution de loi de puissance de manière naturelle à partir de considérations informationnelles. Néanmoins, de nombreuses questions fondamentales restent ouvertes. La résolution de ces questions nécessite l'utilisation d'outils mathématiques pertinents jusqu'alors inconnus. Pour améliorer la maîtrise de ces problèmes complexes, nous suggérons l'utilisation de la généralisation décrite dans les paragraphes ci-dessus.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement quelques points essentiels de l'approche non extensive de l'information et de la statistique en partant d'une part des théories de Shannon et Boltzmann et d'autre part en utilisant la nouvelle algèbre et la généralisation exponentielle.

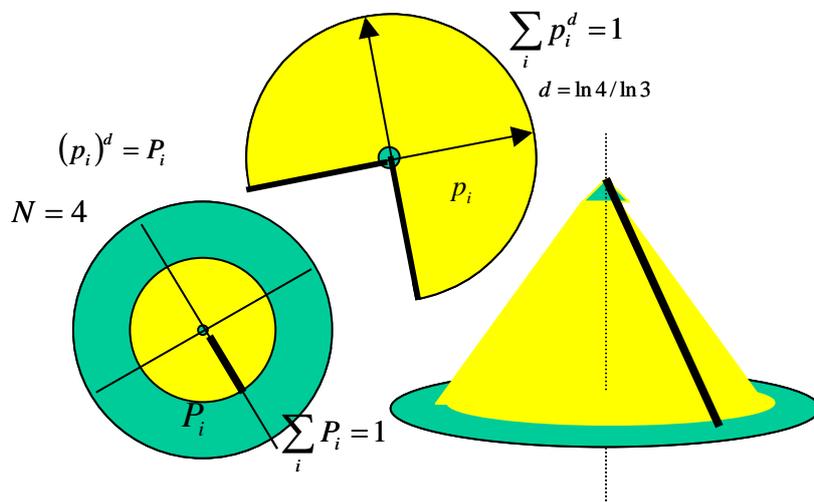


Figure 19. Relation entre la probabilité fractionnaire, la dimension fractale et la structure conique. Nous pouvons facilement voir la relation entre les statistiques fractionnaires et l'analyse in situ des opérateurs différentiels non entiers discutés dans le chapitre précédent

Axiomes	Usuels	Etendus
Certitude / unité d'information	$I(1) = 0; I(e) = 1$	$I(1) = 0; I(e_{1-q}(1)) = 1$
Accumulation	$I(N) \leq I(N + 1)$	$I(N) \leq I(N + 1)$
Partition	$I(N_1, N_2) = I(N_1) + I(N_2)$ pas de corrélation	$I(N_1, N_2) = I(N_1) +_{1-q} I(N_2)$
Intérêt statistique	$I(N) = I_w + \sum_i p_i I(N_i)$	$I(N) = I_w + \sum_i p_i^q I(N_i)$ Type Fractionnaire

Table 5. Ensemble d'axiomes pour la théorie de l'information.

Définition de l'entropie	$\sum_i p_i = 1$	$\sum_i p_i^q = 1$
$I_i = \ln p_i$	Théorie de Shannon (ST) $S = -k \sum_i p_i \ln p_i$	Statistique fractale des ensembles ouverts (Théorie E/WNLM) $S = -k \sum_i p_i^q \ln p_i$

$I_i = \ln_{1-q} p_i$	<p style="text-align: center;">Théorie de Tsallis (TT)</p> $S = -k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{1 - q} = -k \sum_i p_i \ln_{q-1} p_i$	<p style="text-align: center;">Statistique non extensive des ensembles ouverts (NE/WNLM Theory)</p> $S = -k \frac{\sum_i p_i - 1}{1 - q} = -k \sum_i p_i^q \ln_{1-q} p_i$
-----------------------	--	---

Tableau 6. Quatre formalismes construits par introduction d'un paramètre q de non extensivité dans l'axiome de normalisation de la théorie de l'information.

Les statistiques thermodynamiques standard sont basées sur la théorie de l'information. Cette théorie suggère une définition logarithmique de l'information : $I(N) \propto \ln(N)$ et un ensemble de 4 axiomes (Tableau 5).

Comme le montre l'exemple de la géométrie fractale en lien avec les hypothèses de séparabilité des singularités, la cohérence de ces axiomes fait ici défaut et l'introduction d'une généralisation s'impose. Dans le cadre différentiel, il est clair que cette généralisation doit localement prendre en compte une nouvelle forme de dérivabilité fondée non plus sur la capacité de construire une tangente le long d'une fonction mais de recouvrir la même droite par des boules de mesure paramétrées en échelles (Figure 19) présentant les propriétés différentielles non entières par le truchement d'un découpage adapté du disque de mesure. Ce faisant, l'extension de la nouvelle algèbre propose de dépasser les deux paradigmes qui fondent la théorie de l'information traditionnelle :

- Le paradigme de complétion statistique : $\sum_{\{N\}} (1/N) = \sum_{\{N\}} p_i^d = 1$ dont on est maintenant en mesure de justifier le fondement.
- Le paradigme de position singulière du logarithme et de la fonction exponentielle. L'information doit maintenant être écrite à l'aide de la fonction généralisée $I(N) = \ln_{1-q}(N)$ où q se trouve alors associé à 'd'.

Évidemment, ces opérations conduisent à un nouvel ensemble d'axiomes (Tableau 5).

Il est bien connu que la théorie de l'information est la base de la thermodynamique statistique. Ce contrôle passe par la définition de l'entropie qui est la fonction clé de la thermodynamique. Toute modification de cette définition change la fonction d'entropie et change toute la fonction de bilan énergétique. Une analyse détaillée des opportunités ouvertes par le changement des axiomes de la théorie de l'information conduit à des opportunités combinatoires de la représentation des phénomènes physiques. Ces opportunités sont pointées via la fonction d'entropie (voir Tableau 6). Par exemple E/WNLM peut être appliqué pour la représentation des électrons supraconducteurs dans le solide, NE/WNLM pour l'optimisation d'ensembles économiques, TT pour la représentation de gaz turbulent d'électrons. Les applications des statistiques incomplètes (NIST et additives) à certains systèmes quantiques sont illustrées dans les figures 20 et 21. Les conséquences thermodynamiques de ces combinaisons d'hypothèses par rapport à la fonction de partition qui contrôle la distribution d'énergie sur un arbre d'énergie sont données dans le Tableau 7. Il convient de noter que, dans les statistiques incomplètes, non seulement le paramètre q a un lien physique exact avec la fractalité, mais l'entropie ou la mesure d'information q -logarithme peut naturellement apparaître comme une mesure du changement d'entropie ΔI_q de non équilibre.

	Normalisation	Entropie S	Probabilité p_i	Fonction de partition Z
BGS	$\sum_i p_i = 1$	$-k \sum_i p_i \ln p_i$	$e^{-\beta E_i} / Z$	$\sum_i e^{-\beta E_i}$
NIST	$\sum_i p_i = 1$	$-k \sum_i p_i \ln_{q-1} p_i$	$e_{q-1}^{-\beta E_i} / Z$	$\sum_i e_{q-1}^{-\beta E_i}$
	$\sum_i p_i^q = 1$	$-k \sum_i p_i^q \ln p_i$	$e^{-\beta E_i} / Z$	$\left[\sum_i (e^{-\beta E_i})^q \right]^{1/q}$
		$-k \sum_i p_i^q \ln_{1-q} p_i$	$e_{1-q}^{-\beta E_i} / Z$	$\left[\sum_i (e_{1-q}^{-\beta E_i})^q \right]^{1/q}$

Tableau 7. Grandeurs physiques (distribution de probabilité, fonction de partition, entropie) évaluées dans le cadre de la physique statistique (respectivement à partir du formalisme de Boltzmann et du formalisme non extensif). Les statistiques correspondantes sont brièvement données dans le tableau 6 pour le NIST et aussi pour une généralisation additive de BGS [WaQA01].

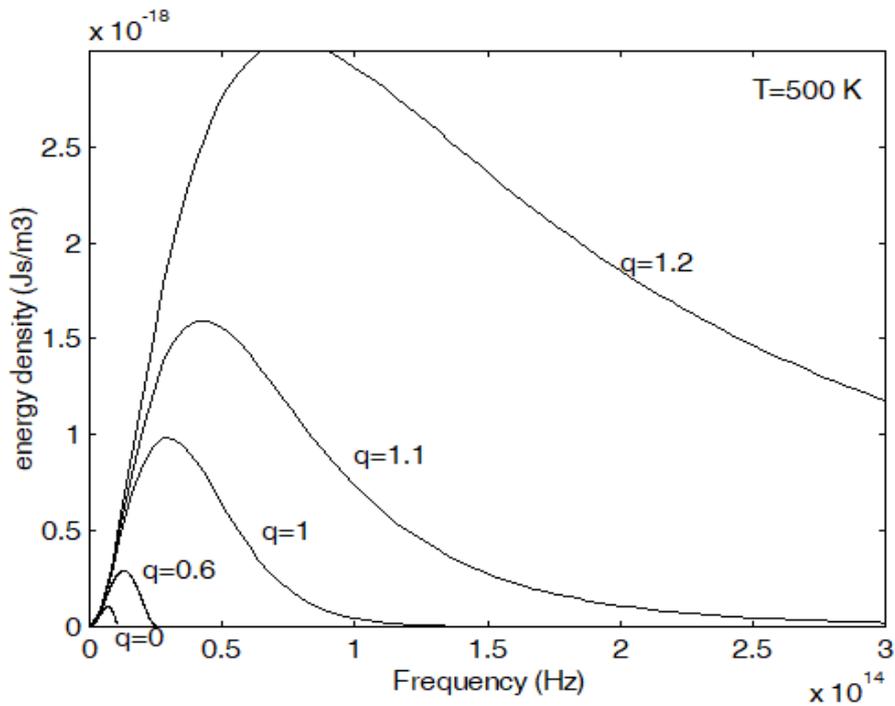


Figure 20. Illustration de l'émission d'un corps noir pour laquelle la loi de Stefan-Boltzmann de l'énergie totale émise $\propto T^4$ existe. Voir [WaNi98] pour plus de détails.

Si l'espace d'évolution est de dimension fractale d_f [WaQA04] et si l'espace de plongement est de dimension d et par ailleurs occupé de manière homogène, nous aurons :

$$\Delta I_q = \sum_i (p_i^q - p_i) \quad [27]$$

On note que le rapport de ce changement ($d_f - d$) est juste, comme on pouvait l'anticiper [WaQA04], l'entropie TT si $q = d_f/d$. Il peut être démontré que l'approche variationnelle appliquée à ΔI_q peut produire de nombreuses distributions de loi de puissance. Nous voudrions mentionner que la méthode variationnelle pour ΔI_q n'est pas ici une hypothèse ou un principe tel que le principe d'entropie maximale de Jaynes. Il s'agit juste d'une exigence du principe de moindre action de Maupertuis appliqué à tous les processus dynamiques stochastiques de systèmes hors d'équilibre, comme le prouvent les références [WaQA04].

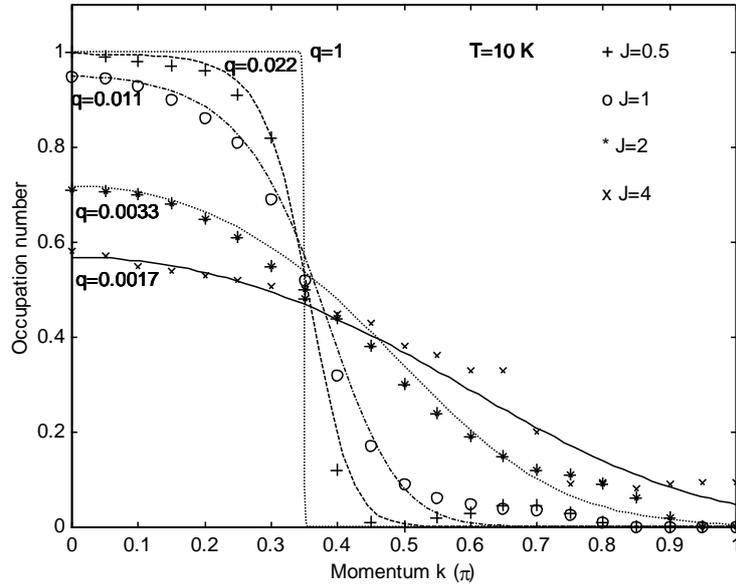


Figure 21. Distribution quantique des fermions (raies) des statistiques incomplètes additives. Les symboles représentent des données expérimentales d'électrons lourds fortement corrélés. Voir [WaLe02] pour plus de détails.

Un autre point à remarquer à propos du NIST est que le formalisme usuel pour les systèmes contenant un même q a pu être étendu à un formalisme pour les systèmes contenant des q distincts [NiPe05]. Cette extension est nécessaire car le formalisme partant d'un q unique n'était pas capable de traiter l'équilibre thermique entre des systèmes hétérogènes caractérisés avec de multiples valeurs de q , ce qui représentait un sérieux point faible critiqué par de nombreux scientifiques (voir [NiPe05] et ses références).

Cette extension est réalisée à l'aide de la non-additivité d'information appliquée à I_q pour un système $A+B$ composé de deux composantes A et B :

$$(1 - q_{A+B})I_{q_{A+B}}(A+B) = (1 - q_A)I_{q_A}(A) + (1 - q_B)I_{q_B}(B) + (1 - q_A)(1 - q_B)I_{q_A}(A)I_{q_B}(B) \quad [28]$$

En fait, ce n'est que la pseudo-additivité de la variation d'entropie ΔI_q , i.e.,

$$\Delta I_{q_{A+B}}(A+B) = \Delta I_{q_A}(A) + \Delta I_{q_B}(B) + \Delta I_{q_A}(A)\Delta I_{q_B}(B) \quad [29]$$

Quand $q_A = q_B = q$, l'équation (28) devient la pseudo-additivité habituelle de l'entropie de Tsallis pour des systèmes de valeur q unique :

$$I_q(A+B) = I_q(A) + I_q(B) + (1 - q)I_q(A)I_q(B)$$

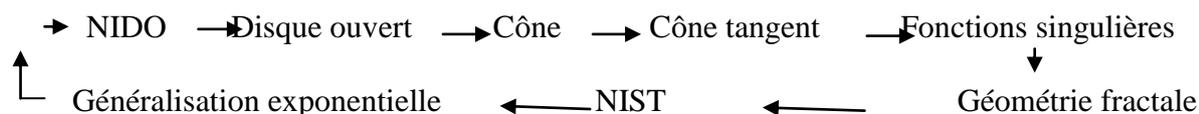
qui n'est rien d'autre que la formulation de la non extensivité définie par l'équation (6) de l'algèbre généralisée.

La méthode variationnelle appliquée aux informations ci-dessus conduit à une distribution de probabilité p_i de l'énergie en fonction de la q -exponentielle généralisée comme indiqué dans le tableau 2. Notez que la distribution de l'énergie est obtenue en supposant que les états physiques sont déterminés par l'énergie interne U_q du système calculé à partir de la formule $U_q = -\sum_{i=1}^w p_i^q E_i$ qui est utilisé comme contrainte originale de la variation de l'information. Dans ce cas, une température T du système peut être donnée par $\frac{1}{kT} = \frac{\partial I_q}{\partial U_q}$.

4. Perspectives

Ainsi avons-nous considéré dans cette note la généralisation des fonctions exponentielles et logarithmiques. Cette généralisation aborde à la fois (i) la question de l'algèbre à appliquer pour des ensembles complexes de données, (ii) la question des opérateurs pouvant être utilisés pour manipuler ces données et écrire sous une forme simple les lois physiques décrivant les comportements des systèmes complexes en particulier non additifs.

Il est montré que l'algèbre qui fonde la généralisation est caractérisée par des frontières floues telles qu'elles peuvent par exemple se présenter avec des objets fractals dans les petites échelles. Dans ce contexte, la compréhension met en évidence la forte relation entre la problématique algébrique étendue et la problématique de l'équation différentielle non entière. Une vue schématique permet de comprendre la pertinence de la chaîne de relations formelles :



C'est donc par le truchement d'une algèbre modifiée par rapport aux algèbres additives habituelles que cet article aborde les fonctions de base généralisées. La relation entre les opérateurs qui en découlent et cette algèbre avec les géométries fractales et la dynamique sous le contrôle d'opérateurs différentiels non entiers est analysée. Les différents aspects des statistiques incomplètes sont développés à l'aide des nouveaux opérateurs mais méritent d'être encore approfondis.

Bibliographie

- [CrLe 83] Crépy, G. ; Le Méhauté, A. : Introduction to transfer and motion in fractal media : the geometry of kinetics, *Solid State Ionics*, **9&10** (1983) 17-30.
- [CrLe 82] Crépy, G. ; Le Méhauté, A. : Sur quelques propriétés des transferts électrochimiques en géométrie fractale, *C.R Acad. Sc. Paris*, **t 294**, Série II (1982), 685-691.
- [LeMe 90] Le Méhauté, A. *Fractal géométrie, Théorie et applications*, Hermes Paris (1990) et *Fractal geometry, Theory and applications*, Penton Press, Londre , 1991.
- [LeNi 98] Le Méhauté A. ; Nigmatullin, R. ; Nivanen, L. *Flèches du temps et géométrie fractale*, Hermes, Paris, (1998).
- [LeNi 00] Le Méhauté, A. ; Nivanen, L. ; Bashkov, V. : *Généralisation du concept de résistance en milieu fractal*, In Proceedings of Geomphys-IV International Conference, Kazan, Georesources, **1** (2000) 40-44.
- [NiLe 00] Nivanen, L. ; Le Méhauté, A. : *Fractional derivation and behavior of the ponctuation of torus at infinity*, In Proceedings of SPIE IRQO'99, Quantum Optics, **4061** (2000) 180-185.
- [NiLe 03] Nivanen, L. ; Le Méhauté, A. ; Wang, Q.A. : Generalized algebra within a non extensive statistics, *Reports on Mathematical Physics*, **52** (2003) 437, cond-mat/0303061.
- [NiPe 05] Nivanen, L. ; Pezeril, M. ; Wang, Q.A. ; Le Méhauté, A. : Applying incomplete statistics to non extensive systems with different q indices, *Chaos, Solitons & Fractals*, **24** (2005)1337-1339, cond-mat/0305398.
- [NIST83] NIST Meeting on Advanced Statistics. National Institute on Information and Technology (1983) Gaithersburg
- [NiWa05]] Nivanen, L. ; Wang, Q.A ; Le Méhauté, A. ; *From complex systems t generalized statistics and algebra*, in Fractional differentiation and its applications, Editeurs A. le Méhauté, J.A. Tenreiro Machado, J.C. Trigeasou and J. Sabatier; U Book on demand ; Berlin (2005) 209
- [TsaC 88] Tsallis, C. : *J. Statis. Phys.*, **52**(1988)479 ; Curado E.M.F. ; Tsallis, C. : *J. Phys.A: Math. Gen.*, **24**(1991) L69 ; Tsallis, C. ; Mendes R.S. ; Plastino, A.R. : *Physica A*, **261** (1999) 534.

- [TsaC 01] Tsallis, C. : in *Non Extensive Statistical Mechanics and Its Applications*, Eds. S. Abe and Y. Okamoto, *Series Lecture Notes in Physics* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).
- [VaAr19] Valence, A. : *Montrer et démontrer : La dualité d'Isbell ou les voies à doubles sens des raisonnements scientifiques*, Editions de la Sorbonne (2019)
- [WaQA 01] Wang, Q.A. : Incomplete statistics : non extensive generalization of statistical mechanics, *Chaos, Solitons & Fractals*, **12**(2001)1431, cond-mat/ 0009343 ; Wang, Q.A. : Non extensive statistics and incomplete information, *Euro. Phys. J.B*, **26**(2002)357, cond-mat/0107065 ; Wang, Q.A. : Extensive generalization of statistical mechanics based on incomplete information theory, *Entropy*, **5** (2003)220-232, cond-mat/0009354.
- [WhGW 78] Whitehead, G.W. *Elements of homotopy theory*, Springer, New-York, 1978.
- [WaQA 04] Wang, Q.A. Incomplete information and fractal phase space, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**(2004)639-645, cond-mat/0207647 ; Wang, Q.A. ; Le Méhauté, A. ; Nivanen, L. ; Pezeril, M. : Fractal geometry, information growth and non-extensive thermodynamics, *Physica A*, **340**(2004)117-124 ; Wang, Q.A. ; Le Méhauté, A. : Measuring information growth in fractal phase space, *Chaos, Solitons & Fractals*, **21**(2004)893-899, cond-mat/0305540.
- [WaQA 05] Wang, Q.A. : Maximum path information and the principle of least action for chaotic system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **23**, (2004) 1253-1259, cond-mat/0405373.
- [WaNi 98] Wang, Q.A. ; Nivanen L. ; Le Méhauté, A. : Generalized blackbody distribution within the dilute gas approximation, *Physica A*, **260**(1998)490-496 ; Wang, Q.A. ; Nivanen, L. ; Le Méhauté, A. ; Pezeril, M. ; Temperature and pressure in non extensive thermostatics, *Europhys. Lett.*, **65**(2004) 606-612, physics/0311034 and ccsd-00000824.
- [WaLe 02] Wang Q.A. ; Le Méhauté, A. : Extensive form of equilibrium non extensive statistics, *J. Math. Phys*, **43**(2002)5079-5089 ; Wang, Q.A. : Correlated electrons and generalized statistics, *Euro. Phys. J. B*, **31**(2003)75-79, cond-mat/0205038