

Paradoxe de l'entropie : un bit d'information sans énergie

Paradox of entropy: a bit of Information without energy

Version 2 ¹

Jean Argouarc'h²

² jr.argouarch@gmail.com

RÉSUMÉ. Des systèmes physiques matérialisant un bit de mémoire ont récemment fait l'objet d'expériences pour explorer le lien entre l'information et l'entropie ou pour réaliser des démons de Maxwell. Qu'il s'agisse de systèmes microscopiques (électron unique, molécule) ou mésoscopiques (bille de verre, particule colloïdale, nano-aimant), leurs changements d'état sont le résultat de transitions élémentaires provoquées par les fluctuations thermodynamiques ou par un effet tunnel quantique.

Les équations probabilistes de ces transitions permettent d'établir directement les formules d'échange d'énergie entre la mémoire, la source d'énergie qui en contrôle l'état et le thermostat qui l'entoure, en évitant un détour par la théorie de l'information. La théorie qui en résulte explique l'ensemble des résultats expérimentaux des mémoires bistables et des mémoires à bascule. Elle montre l'effet de la vitesse du processus sur les énergies en jeu et sur la dissipation thermique.

Elle met au jour le paradoxe de la temporalité de l'entropie, qui avait été évoqué par Landau et Lifshitz, à savoir que l'entropie n'est pas indépendante du temps, plus précisément que la valeur de l'entropie à cette échelle d'énergie dépend de la durée retenue pour son évaluation. Elle explique pourquoi il est possible de créer ou d'effacer un bit d'information avec une énergie largement inférieure à $Kb T \log 2$, la limite de Landauer, et elle résout complètement l'énigme de la machine de Szilard.

ABSTRACT. Physical systems materializing a bit of memory have recently been the subject of experiments to explore the link between information and entropy or to realize Maxwell's demons. Whether microscopic (single electron, molecule) or mesoscopic (glass bead, colloidal particle, nano-magnet) systems, their changes of state are the result of elementary transitions caused by thermodynamic fluctuations or by quantum tunnelling.

From the probabilistic equations of these transitions we deduce directly the formulas of energy exchanges between the memory, the energy source which controls its state and the thermostat which surrounds it, avoiding a detour by the theory of information. The resulting theory explains all the experimental results of bistable and tilt memories. It shows the effect of the speed of operations on the energies involved and on the heat dissipation.

It brings to light the paradox of the temporality of entropy, which had been evoked by Landau and Lifshitz, namely that entropy is not independent of time, more precisely that the value of entropy at this energy scale depends on the duration retained for its evaluation. It explains why it is possible to create or delete a bit of information with an energy well below $b T \log 2$, the Landauer limit, and it completely solves the enigma of the Szilard's machine.

MOTS-CLÉS. Entropie, théorie de l'information, mémoire bistable, mémoire à bascule, démon de Maxwell, limite de Landauer, machine de Szilard, temporalité de l'entropie.

KEYWORDS. Entropy, information theory, bistable memory, tilt memory, Maxwell's demon, Landauer limit, Szilard's machine, entropy temporality.

1. Introduction

Depuis quelques années plusieurs équipes de chercheurs ont pu réaliser des expériences sur des systèmes physiques à deux états, soit pour chercher à prouver le principe de Landauer selon lequel l'effacement d'un bit d'information requiert une dissipation d'énergie d'au moins $Kb T \log 2$ (constante de Boltzmann $Kb = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$) à la température T , soit pour montrer que l'on peut extraire cette même quantité d'énergie d'un bit d'information. Ces systèmes sont des mémoires bistables, constituées de deux puits de potentiel séparés par une barrière modulable, ou des mémoires à bascule dont les deux états sont séparés par un écart d'énergie modulable. Il

¹ Cette version 2 utilise des formules plus réalistes pour les fréquences de transition, sans conséquences sur les conclusions de l'étude.

fonctionnent au niveau d'énergie des fluctuations thermodynamiques ($Kb T$, soit environ 1 à $400 \cdot 10^{-23}$ Joule selon les expériences).

Certaines mémoires bistables utilisent un nano-objet soumis à la gravité, dont les changements d'état sont provoqués par un champ électrique ([DiLu09] [JuGB14] [RMPP14] [GaBe16]) ou une force de viscosité ([BAPC12]). D'autres utilisent un nano-aimant, dont une composante du champ magnétique détermine la hauteur de la barrière de potentiel qui sépare les deux états, et dont une composante perpendiculaire provoque les changements d'état ([HLDB16] [GBMZ17]). Les mémoires à bascule utilisent une boîte à électron unique contrôlée par un champ électrique ([KMPA14]), ou une molécule à deux configurations stables contrôlées par une force mécanique ([RiRi19]). Dans la mémoire bistable, un premier paramètre de contrôle règle la hauteur de la barrière qui sépare les deux états. Pour les deux types de mémoire, un actionneur, qui peut être mécanique, électrique ou magnétique, permet de faire varier l'écart de potentiel entre les deux états.

Les auteurs de ces expériences modélisent les transferts de chaleur ou le travail fourni par l'actionneur en s'appuyant sur la théorie de l'information de Shannon ([Shan48]). A ma connaissance aucun n'a proposé de modèle théorique expliquant l'ensemble des phénomènes en jeu lors des changements d'état de ces mémoires. Sans faire appel à la théorie de l'information, on obtient directement les équations des processus quasi-statiques et on peut simuler les processus dynamiques à partir des formules donnant les fréquences de transition d'un état à l'autre, qui ne dépendent que de l'écart d'énergie entre les états.

Dans un article précédent [Argo21] l'auteur a démontré que la limite de Landauer ne s'applique pas aux mémoires à bascule, puisque celles-ci permettent d'inverser un bit de manière réversible, et donc de l'effacer, au sens de Landauer, sans dissipation d'énergie. Mais il restait à expliquer dans le détail les phénomènes élémentaires qui provoquent les transitions d'état de ces mémoires, en particulier pour les systèmes mésoscopiques. Il proposait l'hypothèse de phénomènes quantiques sous-jacents.

La présente étude montre que l'on peut se passer de cette hypothèse et que les lois de la thermodynamique statistique suffisent pour expliquer l'ensemble de ces processus. Le modèle proposé s'applique directement aux systèmes à électron unique, à molécule bistable et à la machine de Szilard à molécule unique ([Szil29]). Il fournit une solution explicite pour les transformations quasi-statiques et une simulation numérique pour les évolutions plus rapides, hors équilibre, en fonction des fréquences de transition entre états.

L'étude révèle un paradoxe qui apparaît à ce niveau d'énergie $Kb T$, à savoir que la valeur de l'entropie dépend de l'échelle de temps considérée, en contradiction avec sa définition classique $dS = dQ/T$. Cette temporalité a par exemple pour conséquence que l'on peut créer un bit de mémoire, avec la réduction d'entropie correspondante $Kb \log 2$, sans dépense d'énergie².

2. Théorie du bit physique

2.1. La mémoire à deux états

Nous considérons un système physique constitué de deux niveaux de potentiel, d'énergie U_0 et U_1 , dont on peut contrôler l'inversion d'un état à l'autre et assurer la stabilité dans le temps de chaque état par une source d'énergie qu'on appellera *actionneur*. Ce système est en contact avec un thermostat maintenu à une température T constante.

² On se réfère ici au niveau d'énergie de Boltzmann $Kb T$, sans tenir compte de limitations plus faibles, comme la limite quantique qui résulte de la relation d'indétermination de Heisenberg ([GBMZ17])

L'écart d'énergie entre les états 0 et 1 est : $\Delta U = U_1 - U_0$, ou plus simplement, en prenant comme origine $U_0 = 0$: $\Delta U = U_1$.

Par la suite, sauf indication contraire, les grandeurs d'énergie interne U , thermique Q et de travail W fourni par l'actionneur sont exprimées en unités $Kb T$, et l'entropie en unités Kb , puisque nous cherchons à réaliser une mémoire dont l'énergie est aussi faible que possible, de l'ordre de grandeur des fluctuations thermiques, soit $Kb T$.

L'écart d'énergie s'exprime alors : $\phi_e = \frac{\Delta U}{Kb T}$

Le schéma général de la mémoire est représenté sur la figure 1, qui montre un état 0 d'énergie potentielle nulle, un état 1 d'énergie potentielle ϕ_e , séparés par une barrière de potentiel d'énergie ϕ_b .

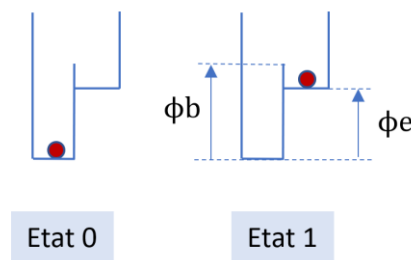


Figure 1. Mémoire à deux états

Dans la mémoire bistable, la barrière d'énergie ϕ_b sépare les états 0 et 1 pour les stabiliser. Dans la mémoire à bascule il n'y a pas de barrière d'énergie ($\phi_b = \phi_e$), le seul paramètre de contrôle est l'écart d'énergie ϕ_e . Ces mémoires n'ont que deux états possibles 0 ou 1, sans position intermédiaire. Les transitions de l'un à l'autre sont quasi-instantanées, provoquées par un phénomène stochastique, qui peut être de nature quantique (transition de spin, effet tunnel), ou classique, par fluctuations thermiques.

A l'équilibre, ϕ_e et ϕ_b étant constants, les probabilités P_0 et P_1 des deux états sont données par la fonction de partition canonique :

$$P_0 = \frac{e^{-\frac{U_0}{KbT}}}{e^{-\frac{U_0}{KbT}} + e^{-\frac{U_1}{KbT}}} \quad \text{d'où :} \quad P_0 = \frac{1}{1 + e^{-\phi_e}} \quad \text{et} \quad P_1 = \frac{1}{1 + e^{\phi_e}} \quad (1)$$

Dans le cas où $\phi_e = \phi_b = 0$ la mémoire commute aléatoirement d'un état à l'autre selon la fréquence moyenne f_0 caractéristique du système, son état est aléatoire ou « randomisé ». Pour qu'une mémoire soit utilisable, il faut qu'elle soit stable pendant une certaine durée. Il faut pour cela que la fréquence de commutation d'un état à l'autre soit suffisamment faible et donc que ϕ_e ou ϕ_b soit suffisamment élevé.

Lors d'un changement d'un état stable vers un autre état stable il peut se produire plusieurs transitions élémentaires avant la stabilisation dans un état final.

2.2. Transitions élémentaires

La figure 2 représente une transition élémentaire de l'état 0 vers l'état 1 dans le cas où $\phi_e > 0$. Une fluctuation thermique ou un effet tunnel d'énergie supérieure à ϕ_b provoque un saut vers l'état 1. Il en résulte une variation d'énergie potentielle ϕ_e , indépendante de ϕ_b . Dans le cas présent le thermostat fournit une énergie thermique δQ qui est transformée en énergie potentielle δU , sans modification des paramètres de contrôle ϕ_e et ϕ_b : $\delta Q = \delta U = \phi_e$.

Inversement lors d'une transition spontanée de l'état 1 vers l'état 0 la mémoire perd une énergie potentielle $\delta U = -\phi_e$ transformée en énergie thermique transmise au thermostat $\delta Q = \delta U = -\phi_e$.

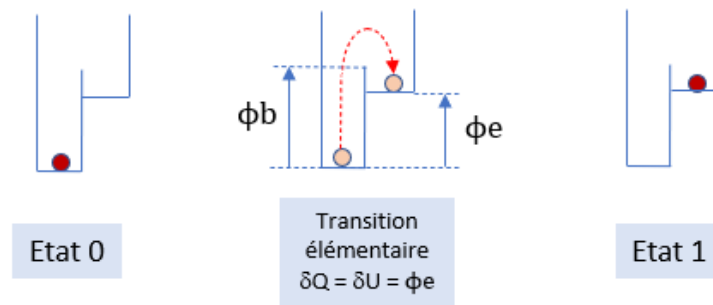


Figure 2. Une transition d'état élémentaire

2.3. Evolution de l'état du système.

Les fréquences de transitions élémentaires F_{01} (de 0 vers 1) et F_{10} (de 1 vers 0) dépendent de ϕ_e , de ϕ_b et du profil énergétique du système.

Si l'on connaît ces deux fonctions caractéristiques, l'état initial du système ainsi que l'évolution de ϕ_e et ϕ_b en fonction du temps, il est possible de calculer par itération l'état du système à tout instant. Le processus est stochastique, chaque transition élémentaire entraîne une discontinuité, et l'état final est extrêmement variable (voir section 3.3 ci-dessous).

Il est possible de résoudre explicitement le problème pour un processus quasi-statique (dont la vitesse tend vers zéro) et de calculer la distribution de probabilité de l'état du système à tout moment.

P_0 et P_1 étant les probabilités des états 0 et 1, la probabilité P_1 varie selon l'équation d'évolution ([Seki10] p.107) :

$$dP_1 = (P_0 F_{01} - P_1 F_{10})dt$$

ou :
$$dP_1 = ((1 - P_1)F_{01} - P_1 F_{10}) dt$$

Dans le cas d'une évolution quasi-statique on observe l'équilibre :

$$P_0 F_{01} = P_1 F_{10}$$

D'après (1) on en déduit : $\frac{F_{01}}{F_{10}} = e^{-\phi_e}$. (2)

Cette équation reste applicable hors équilibre, compte-tenu du caractère quasi-instantané des transitions élémentaires³.

2.4. Transferts d'énergie

L'énergie potentielle de la mémoire vaut U_0 dans l'état 0, avec la probabilité P_0 , et U_1 dans l'état 1 avec la probabilité P_1 . Sa valeur moyenne est donc :
$$U = P_0 U_0 + P_1 U_1.$$

Avec les conventions de la section 2.1, cette équation devient :
$$U = P_1 \phi_e$$

D'où la variation :
$$dU = \phi_e dP_1 + P_1 d\phi_e$$

³ Ceci est confirmé expérimentalement notamment par [KMPA14] et [MMFH09].

Par ailleurs le bilan énergétique du système implique : $dU = dQ + dW$

A une variation $d\phi_e$ correspond le travail dW : $dW = P_1 d\phi_e$ (3)

et, par différence : $dQ = \phi_e dP_1$ (4)

2.5. Energie thermique et entropie

Pour une évolution quasi-statique il est possible d'intégrer ces équations différentielles pour obtenir une solution explicite.

D'après (1) : $\phi_e = \log \frac{1-P_1}{P_1}$ (5)

En combinant (4) et (5) on obtient :

$$\frac{dQ}{dP_1} = \log \frac{1-P_1}{P_1}$$

qui donne par intégration : $Q(P_1) = -[P_1 \log P_1 + (1 - P_1) \log(1 - P_1)] + \text{constante}$

d'où l'énergie thermique fournie à la mémoire entre un état initial et un état final :

$$\Delta Q = [-P_1 \log P_1 - (1 - P_1) \log(1 - P_1)]_{P_1 \text{ initial}}^{P_1 \text{ final}} \quad (6)$$

Lors de la randomisation d'un bit, c'est-à-dire l'évolution de $P_1 = 0$ ou 1 à $P_1 = 0,5$, la mémoire reçoit une énergie thermique $\Delta Q = \log 2$.

Ce transfert de chaleur provoque une variation d'entropie de la mémoire : $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$

On voit que l'entropie de la mémoire augmente de $\log 2$ en passant de l'état aléatoire ($P_1 = 0,5$) à un état stable ($P_1 = 0$ ou 1), et vaut en fonction de P_1 :

$$S(P_1) = -(P_1 \log P_1 + (1 - P_1) \log(1 - P_1))$$

On y retrouve la formule $-(P_0 \log P_0 + P_1 \log P_1)$ proposée par Shannon pour mesurer la quantité d'information d'un bit ([Shan48]).

Mais ces variations ΔQ et ΔW ne sont que des valeurs moyennes obtenues sur un grand nombre d'expériences (voir figure A1 en annexe), et des expériences successives donnent des résultats extrêmement dispersés.

2.6. Travail de l'actionneur

En dérivant (5) on obtient, à l'équilibre : $d\phi_e = -\frac{1}{P_1(1-P_1)} dP_1$

et d'après (3) : $dW = -\frac{1}{1-P_1} dP_1$

on en déduit, par intégration, $\Delta W = [\log(1 - P_1)]_{P_1 \text{ initial}}^{P_1 \text{ final}} \quad (7)$

Ainsi, pour faire passer, de manière quasi-statique, la mémoire de sa position aléatoire $P_1 = 0,5$ à la matérialisation d'un bit 0 ou 1 , l'actionneur doit fournir une énergie $\Delta W = \log 2$, qui est transformée en chaleur transmise au thermostat, et l'opération inverse extrait cette énergie thermique du thermostat pour la transmettre sous forme de travail $\Delta W = \log 2$ à l'actionneur.

3. Application aux mémoires à deux états

3.1. Mémoire bistable

Soit une mémoire bistable à l'état 1 et à l'équilibre, soit $\phi_e = 0$ et $P_0 = P_1 = 0,5$. Le niveau d'énergie ϕ_b de la barrière est élevé pour en assurer la stabilité.

Nous souhaitons inverser l'état de la mémoire (figure 3) en augmentant progressivement ϕ_e de 0 jusqu'à une valeur ϕ_h plus grande que ϕ_b . Quand ϕ_e approche ou dépasse ϕ_b , il se produit une transition vers l'état 0. Toute transition inverse vers l'état 1 est très peu probable, du fait de la valeur élevée de ϕ_b qui s'y oppose. Le processus est dissymétrique. Quand ϕ_e atteint ϕ_h , P_1 est proche de zéro. Quand $P_1 = 0$ l'énergie qui a été fournie au système par l'actionneur est, en appliquant (7) :

$$\Delta W = [\log(1 - P_1)]_{P_1=0,5}^{P_1=0} = \log 2$$

Il reste à ramener ϕ_e à la valeur 0 pour revenir à l'équilibre, à l'état 0. La probabilité d'une transition inverse est proche de zéro du fait de la valeur élevée de ϕ_b . Le bilan énergétique de cette phase est donc proche de zéro. Finalement il a fallu fournir l'énergie $\Delta W = \log 2$ à la mémoire pour inverser le bit. L'énergie potentielle de la mémoire n'ayant pas changé entre l'état initial et l'état final, on en conclut que l'énergie $\Delta W = \log 2$ a été transformée en chaleur. Cette opération est non réversible, et l'entropie globale de l'ensemble mémoire + thermostat a augmenté de $\log 2$.

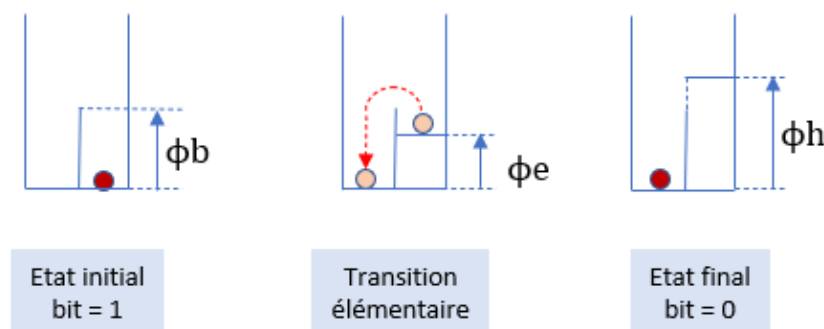


Figure 3. Mémoire bistable

Action sur la hauteur de la barrière

Supposons de nouveau la mémoire à l'équilibre ($\phi_e = 0$) à l'état 1. Si on abaisse la hauteur de la barrière de ϕ_b à 0, les transitions élémentaires qui peuvent se produire pendant cette opération sont énergétiquement neutres puisqu'elles n'entraînent aucune variation d'énergie potentielle.

La randomisation d'un bit de mémoire bistable est donc énergétiquement neutre, contrairement à l'affirmation de Landauer selon laquelle l'effacement d'un bit de mémoire dissipe une énergie d'au moins $Kb T \log 2$.

3.2. Mémoire à bascule

Dans la mémoire à bascule il n'y a pas de barrière de potentiel. La figure 4 montre une évolution de l'état aléatoire $P_1 = 0,5$ à l'état final $P_1 = 0$.

Comme pour la mémoire à bascule l'énergie à fournir est, en appliquant (7) :

$$\Delta W = [\log(1 - P_1)]_{P_1=0,5}^{P_1=0}$$

Soit :

$$\Delta W = \log 2$$

qui correspond à la variation d'énergie thermique $\Delta Q = -\log 2$

et à la diminution d'entropie de la mémoire $\Delta S = -\log 2$

Ici le processus est réversible. Il n'y a pas d'augmentation globale d'entropie, mais seulement transfert réversible d'entropie entre le thermostat et la mémoire.

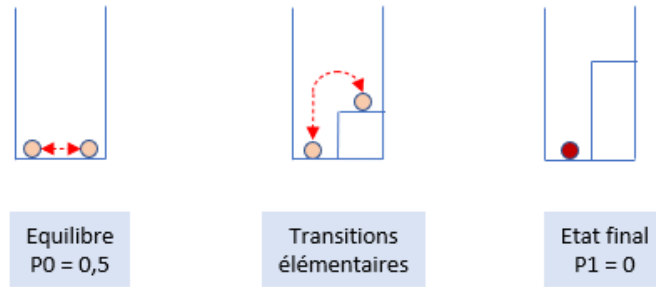


Figure 4. Mémoire à bascule

3.3 Evolution hors équilibre d'une mémoire à bascule

Si le processus précédent représenté en figure 4 est effectué assez rapidement pour qu'il ne soit plus quasi-statique, nous devons revenir à l'approche par les transitions élémentaires de la section 2.2. L'échange d'énergie et de chaleur dépend des fréquences F_{01} et F_{10} de transition entre états, qui elles-mêmes dépendent du processus physique en action.

Les fonctions $F_{01}(\phi_e)$ et $F_{10}(\phi_e)$ ont été évaluées expérimentalement pour une mémoire à bascule basée sur le pliage/dépliage d'une molécule d'ADN ([MMFH09]) et pour une boîte à électron unique ([KMPA14]). Dans les deux cas les fonctions sont symétriques ($F_{01}(\phi_e) = F_{10}(-\phi_e)$).

Dans le cas de la molécule d'ADN utilisée par [MMFH09], ces fonctions sont non seulement symétriques, mais également linéaires. Ce sont des droites qui se rencontrent au point d'équilibre correspondant à la fréquence à l'équilibre f_0 pour $\phi_e = 0$.

La seule solution qui respecte également la contrainte de l'équation (2) est dans ce cas :

$$F_{01} = f_0 e^{-\frac{\phi_e}{2}} \quad \text{et} \quad F_{10} = f_0 e^{\frac{\phi_e}{2}} \quad (8)$$

Ces formules permettent de calculer pas à pas l'énergie W fournie par l'actionneur et la chaleur Q reçue du thermostat, en fonction de ϕ_e dont on connaît la variation $\delta\phi_e$ à chaque incrément de temps δt . Cette variation requiert une énergie $\delta W = \delta\phi_e$ si l'état est 1, et $\delta W = 0$ si l'état est 0.

La probabilité d'une transition pendant ce temps δt est $(F_{01} \delta t)$ ou $(F_{10} \delta t)$ selon que l'état est 0 ou 1. On effectue un tirage au sort selon cette probabilité, pour déterminer s'il y a transition ou non.

S'il n'y a pas de transition, on a $\delta Q = 0$. Alors si l'état est 1 : $\delta U = \delta W = \delta\phi_e$, sinon : $\delta U = \delta W = 0$.

S'il y a transition de l'état 0 vers l'état 1, la mémoire reçoit du thermostat une énergie thermique $\delta Q = \phi_e$. Par ailleurs $\delta W = 0$, d'où $\delta U = \delta W + \delta Q = \phi_e$.

S'il y a transition de l'état 1 vers l'état 0, la mémoire fournit au thermostat une énergie thermique $\delta Q = -\phi_e$. Par ailleurs $\delta W = \delta\phi_e$, d'où $\delta U = \delta\phi_e - \phi_e$.

L'algorithme correspondant est reporté en Annexe.

Appliquons la méthode à la création d'un état 0 ($P_1 \approx 1$) à partir de l'état aléatoire ($P_1 = 0.5$), avec la fréquence à l'équilibre $f_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ et une variation linéaire de l'énergie potentielle entre 0 et $\phi_h = 8$, donnant en fin de cycle $P_1 = 0.9997$, en effectuant la moyenne de 1000 simulations pour chaque valeur du temps de cycle t_c .

Pour un processus quasi-statique (figure 5, pour $t_c = 200 \text{ s}$), la simulation montre une valeur $Q(t)$ centrée sur la fonction $Q_s(t)$ calculée selon les formules (1) et (6). L'écart entre les courbe W et $-Q$ correspond à l'énergie potentielle stockée dans la mémoire en cours de processus. Les deux valeurs de W et $-Q$ aboutissent à $\log 2$ en fin de cycle comme prévu en section 2.5.

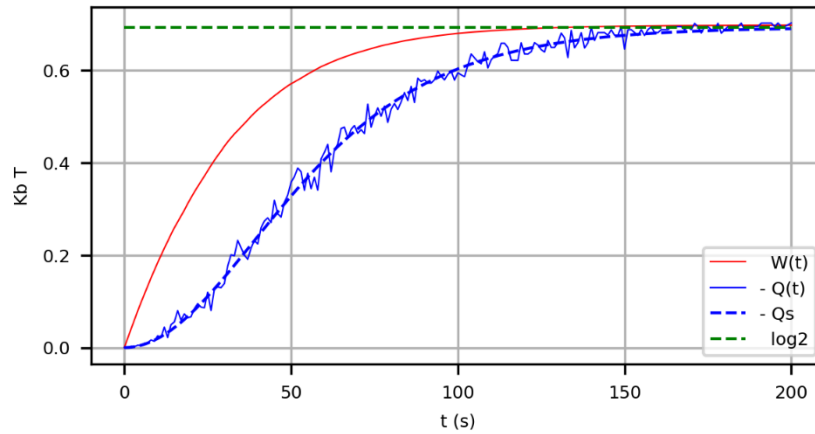


Figure 5. Evolution de W et $-Q$ pendant la création quasi-statique d'un bit

Pour un processus plus rapide (figure 6, pour $t_c = 0,2 \text{ s}$), la valeur finale de $W = 2,7$ dépasse $\log 2$. La différence correspond à l'énergie dissipée pendant le cycle. La valeur finale de $-Q$ est inférieure à la valeur finale de W . Cela correspond aux cas où l'état final est égal à 1. Quand cela se produit, après la fin de cycle, l'état retombe rapidement à zéro, l'écart $W + Q$ est transformé en chaleur et l'on retrouve $Q = -W$.

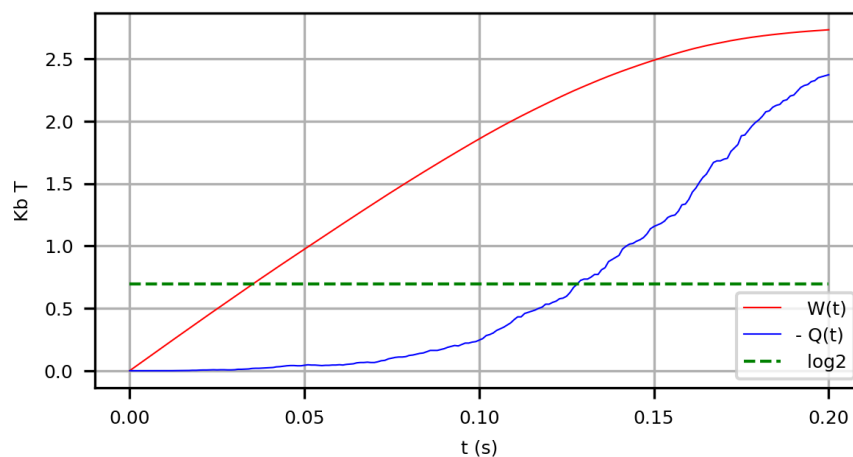


Figure 6. Evolution de W et $-Q$ pendant la création d'un bit pour $t_c = 0,2 \text{ s}$

Les courbes d'évolution des valeurs finales de W et $-Q$ en fonction de la durée du cycle sont représentées en figure 7. Elles indiquent des valeurs moyennes pour 1000 simulations pour chaque point calculé. Malgré ce grand nombre de simulations, les irrégularités dues à la stochasticité des phénomènes sont encore visibles.

La courbe ($W, -Q$) représente l'énergie W fournie par l'actionneur, qui s'est transformée en énergie $Q = -W$ en fin de cycle, après retour à zéro de l'état de la mémoire. L'asymptote de droite est atteinte pour $t_c \sim 100$ s pour un processus quasi-statique.

L'asymptote de gauche pour $t_c \sim 1$ ms correspond à un processus suffisamment bref pour que l'état de la mémoire n'ait pas changé en cours d'action. Si l'état initial était 0, on a $W = Q = 0$. Si l'état initial était 1 on a $W = \phi_h = 8$ en fin de cycle, mais l'état est très instable et il retombe très rapidement à zéro, cette énergie étant transformée en chaleur. Puisque l'état initial est également réparti entre 0 et 1, au final on a en moyenne $W = -Q = \phi_h/2 = 4$. La courbe Q_r de la figure 7 représente cette énergie transformée en chaleur lors du retour à 0. Elle rejoint l'asymptote $Q_r = 0$ pour $t_c > 1$ s.

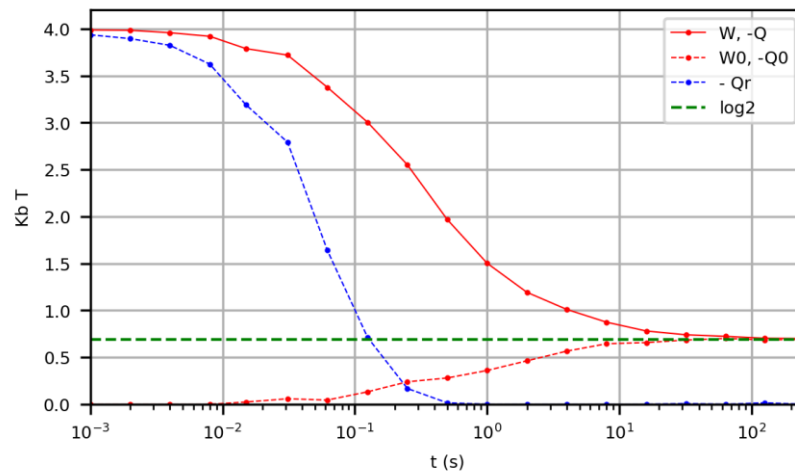


Figure 7. Evolution de W et $-Q$ en fonction de la durée du cycle.

La courbe ($W_0, -Q_0$) correspond aux cas où l'état initial est 0. Quand on diminue le temps de cycle l'échange d'énergie et de chaleur décroît alors régulièrement et tend vers 0. L'asymptote est atteinte vers $t_c \sim 10$ ms. On peut alors créer un bit sans dépense d'énergie, ainsi qu'on le verra plus en détail en section 5.

4. Réalisation de démons de Maxwell

La mémoire à bascule permet de réaliser un démon de Maxwell capable de transformer de l'énergie thermique en énergie active (mécanique, électrique ou magnétique) largement supérieure à $Kb T$ par cycle.

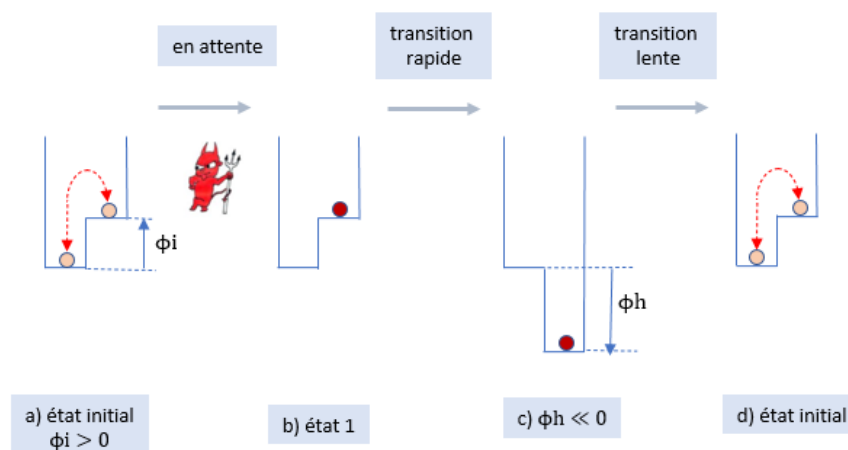


Figure 8. Un démon de Maxwell

Un cycle possible pour un tel démon ([RiRi19]) est le suivant (figure 8) :

- a) Dans l'état initial l'écart d'énergie est fixé à la valeur paramétrable $\phi_i > 0$, de sorte que le bit est en général à 0. La probabilité de l'état P_1 est alors d'après l'équation (1) : $P_{1i} = \frac{1}{1+e^{\phi_i}}$. Le « démon » guette un saut aléatoire à l'état 1.
- b) Dès que le démon détecte un saut vers l'état 1, l'actionneur fait passer subitement ϕ de la valeur positive ϕ_i à la valeur négative ϕ_h , qui stabilise la mémoire à l'état 1. La probabilité P_{1h} correspondante est : $P_{1h} = \frac{1}{1+e^{\phi_h}}$. Pour $\phi_h = -8$, on a $P_{1h} = 0,9997$. On arrondit à $P_{1h} = 1$.
Pendant cette phase adiabatique, l'échange de chaleur δQ est nul. Donc $\Delta W = \Delta U$.
Or $\Delta U = \phi_h - \phi_i$, d'où : $\Delta W = \phi_h - \phi_i$,
soit d'après (5) : $\Delta W_1 = \log \frac{1-P_{1h}}{P_{1h}} - \log \frac{1-P_{1i}}{P_{1i}}$
- c) L'actionneur effectue lentement le chemin inverse, jusqu'à ϕ_i . Quand il atteint ϕ_i , selon l'équation (7) on a :
 $\Delta W_2 = [\log(1 - P_{1i})]_{P_{1h}}^{P_{1i}} = \log(1 - P_{1i}) - \log(1 - P_{1h})$.

L'énergie totale transférée de l'actionneur à la mémoire est finalement :

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = \log P_{1i} - \log P_{1h}$$

$$\Delta W = \log P_{1i}$$

Cette valeur est négative ce qui signifie qu'au cours du cycle l'énergie thermique $\Delta Q = -\log P_{1i}$ a été transformée en énergie active renvoyée à l'actionneur. Cette énergie est théoriquement illimitée quand P_{1i} tend vers 0, mais la fréquence de l'événement tend alors vers 0 de manière exponentielle.

Il faut noter que dans l'expérience citée cette énergie est seulement soustraite à l'énergie de l'actionneur, qu'il soit électrique ou mécanique, et qu'elle n'est pas utilisée à l'extérieur du système. Koski et al. ([KKKA15]) ont réalisé un système de réfrigération en connectant deux mémoires de ce type, dont l'une pompe de la chaleur à l'autre. Cependant dans tous les cas la puissance en jeu reste largement inférieure à celle qui est consommée par le dispositif expérimental.

5. Création d'un bit d'information sans énergie

Le modèle qui précède est validé par toutes les expériences réalisées ces dernières années. Il montre que les transitions de ces mémoires à deux états sont parfaitement expliquées par des équations de physique classique, sans faire appel à une hypothèse sur une éventuelle nature quantique de ces transitions.

Cependant il met au jour un aspect étrange de la notion d'entropie dans ce domaine d'énergies très faibles, qui nous ramènera à la machine de Szilard. Par exemple (figure 9) il existe, dans une mémoire à bascule, plusieurs chemins possibles pour passer d'un même état initial, soit l'état aléatoire $P_1 = 0,5$ au même état final $P_1 = 0$ (bit = 0, $\phi_e = \phi_h$), avec une valeur ϕ_h élevée. Nous allons considérer deux chemins dont les bilans énergétiques sont très différents.

- A. On peut augmenter lentement ϕ_e de manière quasi-statique, c'est-à-dire pendant une durée $t \gg t_0$ avec $t_0 = \frac{1}{f_0} \sim 1$ s. L'actionneur dépense alors une énergie $\Delta W = \log 2$ pour créer ce bit. Cette énergie est transformée en chaleur, transmise au thermostat, et diminue l'entropie de la mémoire de $\Delta S = \log 2$. Le résultat est indépendant de l'état initial de la

mémoire, qu'il soit 0 ou 1.

Cette expérience a été réalisée notamment par [KMPA14].

- B. On peut augmenter ϕ_e à l'instant où le bit est à 0, de manière subite, c'est-à-dire en une durée $t \ll t_0$. Dans ce cas aucune transition élémentaire ne s'effectue en général pendant ce court instant. Le changement d'état est adiabatique, il ne requiert aucune énergie. On a donc obtenu la même diminution d'entropie que par le chemin précédent, mais cette fois sans dépense d'énergie.

Cette expérience a été réalisée notamment par [KMPA14] et par [RiRi19].

Tous les cas intermédiaires sont possibles entre A et B en faisant varier t .

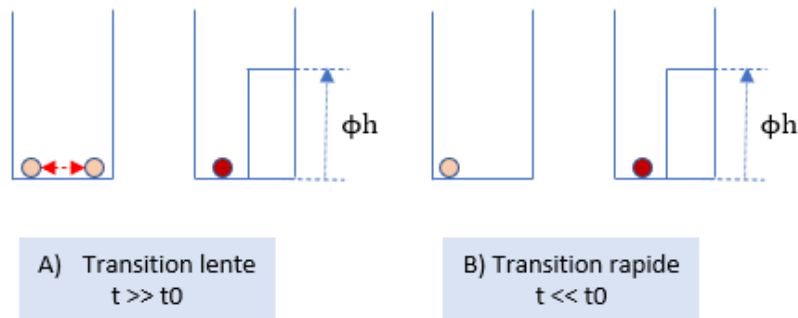


Figure 9. Deux chemins pour créer un bit

Le second chemin (B) nous a donc permis de passer de l'état aléatoire de la mémoire à un bit stable sans dépense d'énergie ni variation d'entropie du thermostat. Par un changement de configuration du système, nous avons diminué son entropie sans dépense d'énergie. Ce fait peut surprendre. Il est pourtant validé par plusieurs expériences.

Nous avons produit de la *néguentropie* au sens de Brillouin ([Bril59]), pour qui il y a équivalence entre un bit d'information et une néguentropie de $Kb \log 2$. Dans notre exemple en effet la nouvelle configuration de notre système l'a rendu capable de transformer de l'énergie thermique en énergie active.

6. Temporalité de l'entropie

Pour tenter de comprendre comment il est possible de modifier l'entropie sans échange d'énergie, considérons le processus de la figure 10.

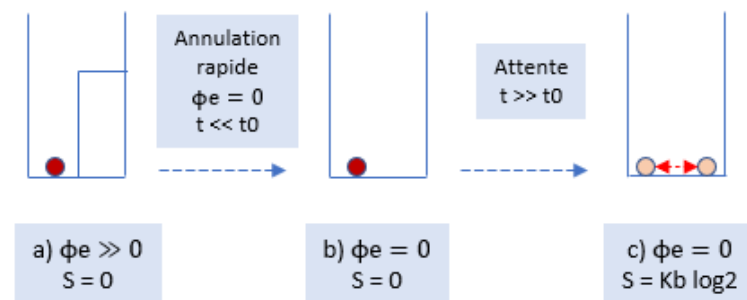


Figure 10. Paradoxe de l'entropie

- a) Dans l'état initial $\phi_h \gg 0$ la mémoire est stable à l'état 0. Son entropie est nulle. On abaisse subitement ϕ_h jusqu'à 0. Cette opération est adiabatique, énergétiquement neutre.

- b) Pendant un certain temps $t \ll t_0$, temps moyen de commutation du système à l'équilibre, le système reste stable dans l'état 0. Son entropie reste nulle.
- c) Au bout d'un certain temps $t \gg t_0$, la mémoire est à l'état aléatoire, commutant entre 0 et 1 à la fréquence moyenne $f_0 = 1/t_0$. Son entropie a donc augmenté de $S = \log 2$ par rapport à l'état initial, alors que son énergie potentielle n'a pas changé et qu'il n'y a eu aucun échange d'énergie entre la mémoire et le thermostat.

Au cours de l'expérience, l'entropie de la mémoire est passée de 0 à $\log 2$ sans transfert d'énergie, ce qui contredit la définition classique de l'entropie, selon laquelle $dS = dQ / T$.

Landau et Lifshitz nous donnent des éléments pour comprendre ce paradoxe ([LaLi69] p.26) : « Il convient d'attirer l'attention sur la signification du temps dans la définition de l'entropie. L'entropie est une quantité qui décrit les propriétés d'un corps pendant un intervalle de temps Δt non nul. Si Δt est donné, pour déterminer l'entropie S on doit imaginer une division du corps en des parties assez petites pour que leurs temps de relaxation soient petits par rapport à Δt . Puisque ces parties doivent elles-mêmes être macroscopiques, il est clair que quand les intervalles de temps Δt sont trop petits, le concept d'entropie n'a plus de sens ; en particulier, on ne peut parler de sa valeur instantanée. »

Cette mise en garde s'applique dans le cas présent, puisque l'entropie est évaluée à des échelles de temps différentes dans les états (b) et (c).

Il n'en reste pas moins que cet état de choses est étrange, et qu'il rejoint les interrogations de certains physiciens sur la notion d'entropie. Selon Penrose ([Penr07] p.670) : “Ma vision des choses quant au statut physique de l'entropie est la suivante : je ne la vois pas comme une notion « absolue » des théories physiques contemporaines, mais comme une notion très commode. Il n'est toutefois pas impossible qu'elle acquière à l'avenir un statut plus fondamental. Pour cela la théorie quantique aura certainement un rôle à jouer...”.

Cette étrangeté pourrait donc provenir d'un lien entre l'entropie et la physique quantique, ce que ne contrediraient pas Landau et Lifshitz ([LaLi69] p.31) “Il est plus raisonnable de penser que la loi d'augmentation de l'entropie [...] résulte de phénomènes quantiques.”

7. La machine de Szilard

La machine de Szilard a souvent servi de référence pour l'analyse des liens entre l'information et l'entropie. Szilard a imaginé cette expérience de pensée pour tenter de résoudre le paradoxe du démon de Maxwell ([Szil29]). Les développements qui précèdent permettent de montrer qu'elle constitue un exemple de démon de Maxwell, et peuvent l'expliquer dans le cadre de la physique classique.

On reprend la machine de Szilard symétrique (figure 11) proposée dans [Argo21]. Un cylindre contenant une seule molécule de gaz est équipé d'un clapet mobile dont un élément peut coulisser verticalement pour diviser le cylindre en deux parties, et qui peut se déplacer horizontalement d'une extrémité du cylindre à l'autre, le tout sans frottement. Deux poids sont reliés au clapet de part et d'autre par des câbles. A l'équilibre ils reposent sur une surface horizontale, et l'un d'entre eux est soulevé dès que le clapet quitte la position médiane.

On suppose que l'étanchéité du clapet n'est pas totale quand il est en position fermée, de sorte que la molécule peut le franchir avec une fréquence moyenne f_1 proche de zéro.

A l'état (a) le clapet est ouvert. On le ferme progressivement en faisant coulisser verticalement sa partie mobile. Nous sommes dans la situation d'une mémoire bistable dont on monte progressivement la barrière jusqu'à une hauteur élevée. Pendant ce temps la molécule peut passer d'un côté à l'autre du clapet, effectuant des transitions élémentaires, qui sont énergétiquement

neutres puisque les deux puits de potentiel sont au même niveau. La fréquence de ces transitions diminue progressivement jusqu'à une valeur f_1 très faible, à l'état (b). La molécule est alors piégée d'un côté ou de l'autre du clapet pendant une durée $t \ll 1/f_1$, d'autant plus grande que le clapet est plus étanche.

Si on libère alors le mouvement horizontal du clapet, la molécule exerce une pression sur sa surface et le pousse jusqu'à une extrémité du cylindre, à l'état (c). Chaque impact de la molécule sur le clapet lui transmet une certaine quantité d'énergie mécanique, transformée en énergie potentielle transmise au contrepoids situé du même côté que la molécule. Chaque impact abaisse légèrement la température de la molécule, aussitôt rétablie (dans ce processus quasi-statique) par le thermostat.

Entre l'état (b) et l'état (c) les énergies en jeu $W = -\log 2$ et $Q = \log 2$ correspondent à l'augmentation d'entropie $\Delta S = \log 2$ de la molécule ([Argo21]). Si on pouvait réaliser cette machine, elle serait un démon de Maxwell capable de se passer de toute forme de mesure ou d'observation pour transformer de l'énergie thermique en énergie mécanique sans dépense d'énergie.

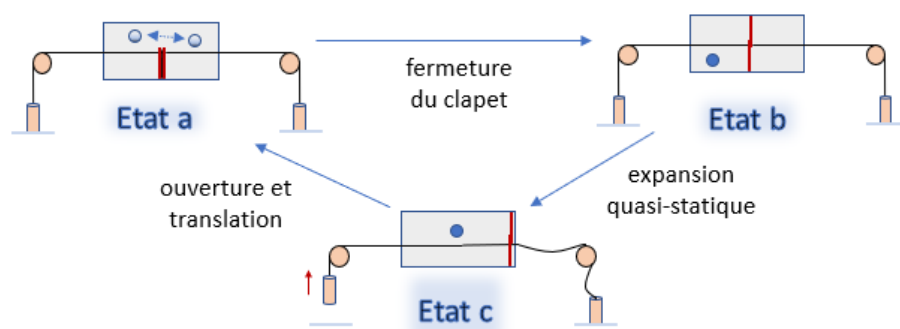


Figure 11. Machine de Szilard symétrique

La machine de Szilard fut à l'origine de la confusion entre entropie et information, quand Von Neumann eut recours à la subjectivité d'un observateur pour en expliquer le fonctionnement ([Neum32]). Selon lui c'est le fait qu'un observateur connaisse la position de la molécule qui en diminue l'entropie et qui permet d'en extraire de l'énergie. C'est finalement le paradoxe de la temporalité de l'entropie qui résout la question.

8. Conclusion

Nous avons établi les équations qui décrivent les changements d'état des mémoires bistables ou à bascule, qui sont provoqués par l'effet tunnel ou par les fluctuations thermodynamiques, sans faire appel à la théorie de l'information ou à la physique quantique. Pour les processus quasi-statiques, elles s'obtiennent de manière extrêmement simple. Pour les processus dynamiques elles ne dépendent que des fonctions donnant les fréquences de transition d'état en fonction de l'écart d'énergie entre les deux états et de la hauteur d'une éventuelle barrière séparant les deux états.

Le modèle qui en résulte est confirmé par plusieurs expériences réalisées depuis une dizaine d'années, à un niveau microscopique (électron, molécule) ou mésoscopique (micro-bille ou particule colloïdale, nano-aimant). Il montre que l'énergie de Landauer $\Delta W = K_b T \log 2$ est dissipée lors de l'inversion d'une mémoire bistable, qui est irréversible. Dans une mémoire à bascule au contraire, les opérations d'inversion ou de randomisation d'un bit sont quasi-réversibles, au sens où cette énergie est presque totalement récupérable.

Le modèle est explicite pour les changements d'état quasi-statiques, et il permet une simulation numérique directe dans les autres cas. Il permet de calculer la quantité d'énergie dissipée en fonction

de la durée du changement d'état, et l'efficacité des démons de Maxwell utilisant la mémoire à bascule pour transformer de l'énergie thermique en énergie active.

Il confirme des résultats expérimentaux qui peuvent sembler étranges, puisqu'ils montrent qu'il est possible de faire passer une mémoire à bascule de son état aléatoire à un bit stable, sans dépense d'énergie, par une transformation adiabatique, très rapide. On peut donc créer de la néguentropie en modifiant la configuration de la mémoire, sans apport d'énergie, et utiliser ensuite cette néguentropie pour transformer de l'énergie thermique en énergie active.

Le modèle donne une explication complète de la machine de Szilard. Enfin il illustre le paradoxe de temporalité de l'entropie, selon lequel l'entropie, à ce niveau d'énergie, dépend de l'intervalle de temps retenu pour l'évaluer. Cet exemple confirme une remarque de Landau et Lifshitz datant du milieu du siècle dernier, et montre que la définition classique de l'entropie $dS = dQ / T$ n'est pas directement applicable à ce niveau d'énergie.

Bibliographie

- [Argo21] ARGOUARC'H, JEAN: L'équivalence information-entropie, le démon de Maxwell et le paradoxe de l'information. In: <https://www.openscience.fr>, OpenScience (2021)
- [BAPC12] BÉRUT, ANTOINE ; ARAKELIAN, ARTAK ; PETROSYAN, ARTYOM ; CILIBERTO, SERGIO ; DILLENSCHNEIDER, RAOUL ; LUTZ, ERIC: Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics. In: *Nature* Bd. 483 (2012), Nr. 7388, S. 187–189
- [Bril59] BRILLOUIN, LÉON: *La science et la théorie de l'information*. Jacques Gabay., 1959
- [DiLu09] DILLENSCHNEIDER, RAOUL ; LUTZ, ERIC: Memory Erasure in Small Systems. In: *Physical Review Letters* Bd. 102, American Physical Society (2009), Nr. 21, S. 210601
- [GaBe16] GAVRILOV, MOMČILO ; BECHHOEFER, JOHN: Erasure without Work in an Asymmetric Double-Well Potential. In: *Physical Review Letters* Bd. 117, American Physical Society (2016), Nr. 20, S. 200601
- [GBMZ17] GAUDENZI, ROCCO ; BURZURÍ, ENRIQUE ; MAEGAWA, SATORU ; VAN DER ZANT, HERRE S. J. ; LUIS, FERNANDO: Quantum-enhanced Landauer erasure and storage (2017). — arXiv: 1703.04607
- [HLDB16] HONG, JEONGMIN ; LAMBSON, BRIAN ; DHUEY, SCOTT ; BOKOR, JEFFREY: Experimental test of Landauer's principle in single-bit operations on nanomagnetic memory bits. In: *Science Advances*, American Association for the Advancement of Science (2016)
- [JuGB14] JUN, YONGGUN ; GAVRILOV, MOMČILO ; BECHHOEFER, JOHN: High-Precision Test of Landauer's Principle in a Feedback Trap. In: *Physical Review Letters* Bd. 113, American Physical Society (2014), Nr. 19, S. 190601
- [KKKA15] KOSKI, J. V. ; KUTVONEN, A. ; KHAYMOVICH, I. M. ; ALA-NISSILA, T. ; PEKOLA, J. P.: On-chip Maxwell's demon as an information-powered refrigerator. In: *Physical Review Letters* Bd. 115 (2015), Nr. 26, S. 260602. — arXiv: 1507.00530
- [KMPA14] KOSKI, JONNE V. ; MAISI, VILLE F. ; PEKOLA, JUKKA P. ; AVERIN, DMITRI V.: Experimental realization of a Szilard engine with a single electron. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* Bd. 111, National Academy of Sciences (2014), Nr. 38, S. 13786–13789
- [LaLi69] LANDAU, L.D. ; LIFSHITZ, E.M.: *Statistical Physics* : Pergamon Press, 1969
- [MMFH09] MANOSAS, MARIA ; MOSSA, ALESSANDRO ; FORNS, NURIA ; HUGUET, JOSEF MARIA ; RITORT, FELIX: Dynamic force spectroscopy of DNA hairpins. II. Irreversibility and dissipation. In:

- [Neum32] VON NEUMANN, JOHN: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press., 1932
- [Penr07] PENROSE, ROGER: *A la découverte des lois de l'univers* : Odile Jacob, 2007
- [RiRi19] RIBEZZI-CRIVELLARI, M. ; RITORT, F.: Large work extraction and the Landauer limit in a continuous Maxwell demon. In: *Nature Physics* Bd. 15 (2019), Nr. 7, S. 660–664
- [RMPP14] ROLDÁN, É ; MARTÍNEZ, I. A. ; PARRONDO, J. M. R. ; PETROV, D.: Universal features in the energetics of symmetry breaking. In: *Nature Physics* Bd. 10 (2014), Nr. 6, S. 457–461
- [Seki10] SEKIMOTO, KEN: *Stochastic energetics* : Springer, 2010
- [Shan48] SHANNON, CLAUDE: A mathematical theory of communication. In: *Bell system technical journal* Bd. 27 (1948), Nr. 3, S. 379–423
- [Szil29] SZILARD, LEO: On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings. In: *Zeitschrift fur Physik* Bd. 9 (1929), Nr. 4, S. 301–310

Annexe

Courbes d'évolution de Q et W – simulation numérique

L'algorithme ci-dessous permet de simuler l'évolution hors équilibre d'une mémoire à bascule. Il n'utilise que les équations (8).

Il est ici directement appliqué au cas décrit en section 3.3, à savoir la création d'un état 0 stable ($\phi_h \gg 0$) à partir d'un état d'équilibre $\phi_e = 0$ avec un temps de cycle t_c .

```
ti += dt                                # incrémentation du temps
fi = fih*ti/tc                          #  $\phi = \phi_h \cdot \text{temps} / \text{temps de cycle}$ 
if bit == 1:                            # incrément W si bit = 1
    W += fih*dt/tc
if bit == 0:                            # équations (8)
    Fi = f0/exp(fi/2)                  # fréquence de transition 0=>1
else:
    Fi = f0/exp(-fi/2i)                # fréquence de transition 1=>0
pt = Fi*dti                             # probabilité de transition
x = random()                           # x aléatoire entre 0 et 1
if x <= pt:                             # tirage au sort
    if bit == 0:                       # transition élémentaire
        bit = 1
        dQ = fi                        # transfert thermique
    else:
        bit = 0
        dQ = -fi
Q += dQ                                # incrément Q
```

Encadré 1. Algorithme des transitions élémentaires pour un incrément de temps dt

En prenant $f_0 = 1$ Hz, pour la durée $t_c = 200$ s on atteint l'asymptote de la figure 5. Pour 1000 simulations correspondant à la création d'un bit dans une mémoire à bascule on obtient alors la distribution suivante de W (figure A1, nombre d'occurrences en ordonnée), qui montre le caractère statistique de la correspondance entre la quantité d'information d'un bit et l'énergie liée.

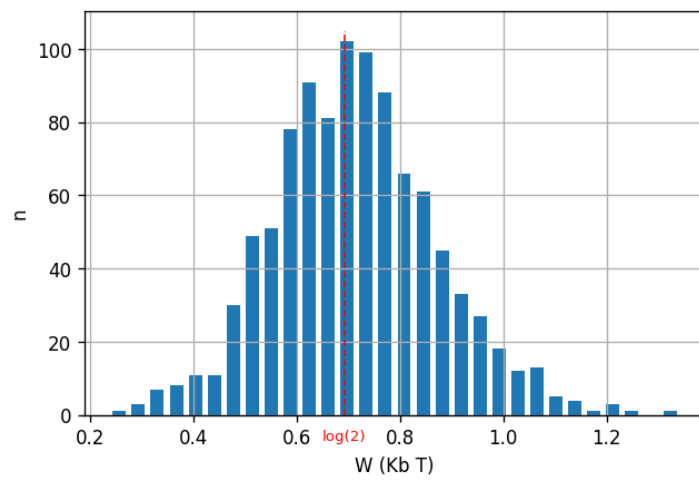


Figure A1. *Un exemple de distribution de W*