

# Première approche d'optimisation d'un système solaire à Cycle Organique de Rankine

## First optimization approach of a solar Organic Rankine Cycle

Michel Feidt<sup>1</sup>, Hamza Semmari<sup>2</sup>

<sup>1</sup> University of Lorraine, Laboratory of Energetics and Theoretical and Applied Mechanics, 2 av. de la Forêt de Haye, 54504 Vandoeuvre Cedex, France, michel.feidt@univ-lorraine.fr

<sup>2</sup> National Polytechnic School of Constantine, BP75 A, Nouvelle Ville RP, 25000 Constantine, Algeria, hamza.semmari@gmail.com

**RÉSUMÉ.** Ce travail présente une approche d'optimisation originale basée sur la thermodynamique optimale en dimensions physiques finies. Cette approche d'optimisation est appliquée sur un cycle organique de Rankine alimenté par une boucle solaire. Ainsi, la chaleur reçue par les capteurs solaires est transmise au cycle moteur afin de produire une énergie mécanique utile grâce à la détente du fluide de travail. Un développement analytique détaillé de l'optimisation du système énergétique est donc présenté dans l'objectif de maximiser la puissance mécanique produite. Cette démarche vise principalement l'optimisation en température, efficacité des échangeurs et les débits calorifiques.

**ABSTRACT.** This work presents a first optimisation approach based on Finite physical Dimensions Optimal thermodynamics - FDOT-. The optimisation approach is applied for an organic Rankine cycle activated by a solar loop. Consequently, the heat received by the solar collectors is transmitted to the thermodynamic cycle in order to produce useful work during the expansion step of the working fluid. Therefore, a detailed analytical development of the optimisation method carried out for the energy system aiming to maximise the output mechanical power. This approach mainly target the optimisation in terms of temperature, heat exchanger efficiencies and heat flow rates.

**MOTS-CLÉS.** Thermodynamique optimale en dimensions physiques finies, optimisation, COR (ORC en anglais), énergie solaire, efficacité énergétique.

**KEYWORDS.** Finite physical Dimensions Optimal thermodynamics, optimization, ORC, solar energy, energy efficiency.

## 1. Introduction

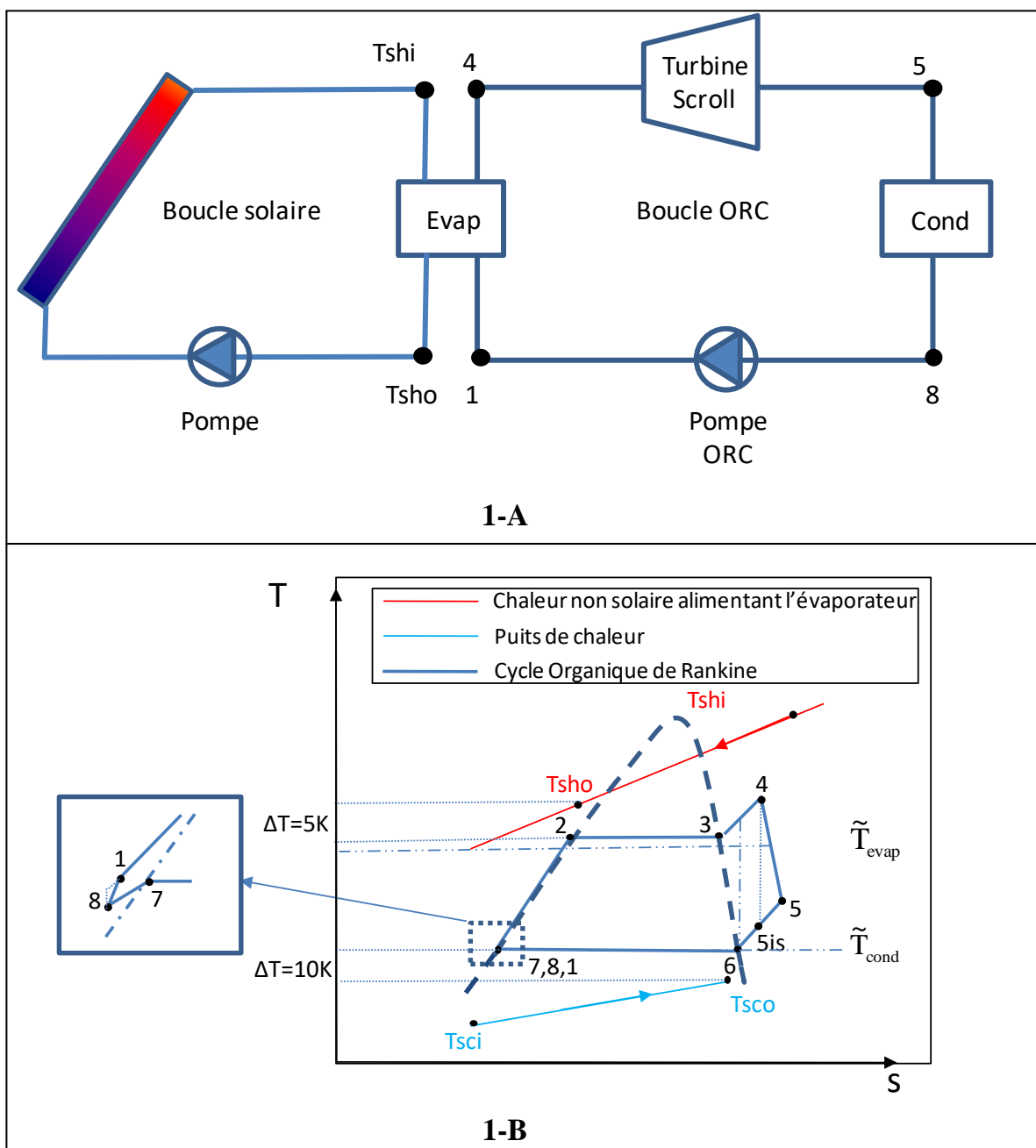
Aujourd'hui, les énergies renouvelables deviennent un vecteur incontournable pour assurer une transition énergétique sereine. En effet, le développement économique et social va engendrer une croissance rapide de la demande énergétique conduisant à une surconsommation des énergies conventionnelles d'ici 2040 [BP 19]. Par conséquent, cela a conduit à l'accélération de l'épuisement des ressources fossiles tout en provoquant une importante pollution atmosphérique due principalement aux émanations des gaz à effet de serre [PAI 14]. A son tour, cette pollution s'est traduite par un changement climatique planétaire avec des conséquences parfois dramatiques sur l'environnement [LET 19].

De ce fait, les énergies renouvelables se sont imposées comme vecteur alternatif afin de répondre à la demande énergétique grandissante tout en s'assurant de la protection de l'environnement et donc moins d'impact sur le changement climatique. Or, il se trouve que l'énergie solaire reste la ressource renouvelable la plus attractive grâce à sa disponibilité et son énorme potentiel. Actuellement, l'énergie solaire est exploitée à l'échelle industrielle pour la production photovoltaïque d'électricité [HAM 19], [HOA 15] ou bien par voie thermodynamique en utilisant plusieurs technologies de capteurs solaires: héliostat [AQA 19], cylindro parabolique [ORC 19], ... etc. En effet, la conversion solaire thermodynamique consiste principalement à capter l'énergie solaire sous forme de chaleur afin d'alimenter un cycle thermodynamique moteur tel que le cycle de Stirling ou le cycle organique de Rankine. A la différence du cycle Stirling, les cycles organiques de Rankine ont connus un

engouement particulier grâce à leur flexibilité. La puissance développée par les ORC peut varier de l'échelle de kW jusqu'à l'échelle de MW [ORC 19].

Toutefois, malgré le fort potentiel des ORC; leurs déploiement et exploitation restent très sensibles au changement des conditions opératoires notamment les niveaux de température des sources, d'où la nécessité d'un bon dimensionnement. Ce dernier requière souvent des études d'optimisation ainsi que des études paramétriques. Ces études d'optimisation sont réalisées souvent sur la base de différentes approches d'optimisation à savoir : l'approche dite Computer-aided molecular design (CAMD) [VAN 19], Celle de Frontière de Pareto [LEE 19] ou encore l'approche Artificial neural network -ANN- [ARS 11]. De ce fait, nous proposons une nouvelle approche d'optimisation basée sur la thermodynamique en dimensions physiques finies dont le modèle analytique, appliqué à un cycle moteur de Rankine activé par une boucle solaire thermique, est développée.

## 2. Modèle analytique



**Figure 1.** 1-A Schématisation de principe du système ORC activé par une boucle solaire ; 1-B Cycle thermodynamique décrit par le système ORC.

Le travail présenté se base sur l'approche thermodynamique optimale en dimensions physiques finies [FEI 13, FEI 06] tout en tenant compte des hypothèses suivantes:

- régime de fonctionnement permanent
- adiabacité des transferts thermiques au niveau des échangeurs

Nous allons appliquer cette approche d'optimisation sur un cycle organique de Rankine activé par une ressource solaire thermique. Ainsi, le développement de l'approche d'optimisation suivra les étapes de bilans suivantes:

### 2.1. Bilan énergétique du capteur solaire

En appliquant le bilan énergétique sur le capteur solaire tout en considérant les éventuelles pertes thermiques, cela permet alors d'écrire:

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = C_g \cdot F_0 \cdot I_s \cdot A_{\text{rec}} - K_L \cdot (\tilde{T}_{\text{rec}} - T_0) \quad [1]$$

avec  $K_L = u \cdot A_L$

Où:

$C_g$ : Concentration du rayonnement solaire, (-)

$F_0$ : Facteur optique, (-)

$I_s$ : densité surfacique du flux solaire, (W/m<sup>2</sup>)

$A_{\text{rec}}$ : surface de réception du capteur solaire, (m<sup>2</sup>)

$A_L$ : surface de déperdition du capteur, (m<sup>2</sup>)

$K_L$ : conductance des pertes thermiques, (W/K)

$u$ : coefficients globale surfacique de pertes thermiques au niveau du capteur, (W/m<sup>2</sup>.K)

$\tilde{T}_{\text{rec}}$ : température moyenne du capteur qui représente également une variable de contrôle

$T_0$ : température ambiante

Considérant maintenant que  $A_{\text{rec}} = A_L$ , nous pouvons écrire qu'à la stagnation:

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = 0 \Rightarrow C_g \cdot F_0 \cdot I_s - u \cdot (T_s - T_0) = 0 \quad [2]$$

Alors la température de stagnation du capteur se définit comme:

$$T_s = T_0 + \frac{C_g \cdot F_0 \cdot I_s}{u} \quad [3]$$

En déduisant l'expression de  $T_0$  à partir de [3], et en la remplaçant dans [1], le flux reçu par le capteur peut s'exprimer alors comme:

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = u \cdot A_{\text{rec}} \cdot (T_s - \tilde{T}_{\text{rec}}) \quad [4]$$

### 2.2. Bilan énergétique sur la boucle solaire

Le flux de chaleur mis à disposition de l'évaporateur (non solaire) s'écrit:

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = \dot{C}_H \cdot (T_{\text{sh0}} - T_{\text{shi}}) \quad [5]$$

$\dot{m}_H$  : débit massique du fluide caloporteur dans la boucle solaire

$C_{pH}$  : chaleur spécifique massique du fluide caloporteur dans la boucle solaire (J/kg.K)

$\dot{C}_H$  : débit calorifique véhiculé dans la boucle solaire, avec  $\dot{C}_H = \dot{m}_H \cdot C_{pH}$

$T_{shi}, T_{sh0}$  : températures d'entrée et sortie du fluide caloporteur aux bornes de l'évaporateur

Comme les pertes thermiques sont considérées négligeables au niveau des échangeurs, cela permet d'écrire que:

$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_{rec} = \dot{C}_H \cdot (T_{sh0} - T_{shi})$$

ou encore

$$\dot{Q}_H = \varepsilon_H \cdot \dot{C}_H \cdot (T_{shi} - T_h) \quad [6]$$

où  $\varepsilon_H$  représente l'efficacité de l'évaporateur dont l'expression est donnée par:

$$\varepsilon_H = 1 - \exp(-NUT_h); \text{ avec } NUT_h = \frac{k_h \cdot A_h}{\dot{C}_H} \quad [7]$$

Identiquement, et comme  $\dot{C}_{rec} = \dot{C}_H$  puisque il s'agit de la même boucle solaire, nous pouvons alors exprimer le flux reçu en faisant apparaître l'efficacité du récepteur:

$$\dot{Q}_{rec} = \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_{rec} \cdot (\tilde{T}_{rec} - T_{sh0}) \quad [8]$$

où  $\varepsilon_{rec}$  représente l'efficacité du récepteur solaire ayant pour expression:

$$\varepsilon_{rec} = 1 - \exp(-NUT_{rec}); \text{ avec } NUT_{rec} = \frac{k_{rec} \cdot A_{rec}}{\dot{C}_{rec}} \quad [9]$$

Une autre expression du flux de chaleur absorbé par le cycle peut être définie en faisant intervenir le débit massique du fluide de travail,  $\dot{m}_{FT}$ , cela donne:

$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_{rec} = \dot{m}_{FT} \cdot \Delta h_{evap} = \varepsilon_H \cdot \dot{C}_H \cdot (T_{shi} - \tilde{T}_{evap}) \quad [10]$$

### 2.3. Bilan énergétique sur la boucle ORC

En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur le cycle moteur qui par définition absorbe la puissance calorifique à haute température  $\dot{Q}_H$ , pour produire une puissance mécanique utile  $\dot{W}_{net}$  tout en rejetant un flux de chaleur  $\dot{Q}_c$  à une température inférieure; nous déduisons alors:

$$\dot{Q}_H = \dot{W}_{net} + \dot{Q}_c \quad [11]$$

D'autre part, en considérant la méthode du ratio entropique dont le coefficient permet de prendre en compte les irréversibilités dans leur globalité, nous pouvons écrire:

$$\frac{\dot{Q}_H}{\tilde{T}_{evap}} = I_c \cdot \frac{\dot{Q}_c}{\tilde{T}_{cond}} \quad [12]$$

Où  $\tilde{T}_{evap}$  et  $\tilde{T}_{cond}$  : représentent respectivement les températures moyennes entropiques du fluide de travail dans l'évaporateur et le condenseur

## 2.4. Bilan énergétique sur la boucle de refroidissement

En considérant une boucle de refroidissement à air ou  $T_{sci} = T_0$ , le flux de chaleur fatale évacué par le condenseur s'écrit alors:

$$\dot{Q}_c = \dot{C}_c \cdot (T_{sc0} - T_0) \quad [13]$$

Nous pouvons également exprimer le flux de chaleur fatale en fonction de l'efficacité du condenseur  $\varepsilon_c$ , on écrit alors:

$$\dot{Q}_c = \varepsilon_c \cdot \dot{C}_c \cdot (\tilde{T}_{cond} - T_0) \quad [14]$$

où

$$\varepsilon_c = 1 - \exp(-NUT_c); \text{ avec } NUT_c = \frac{k_c \cdot A_c}{\dot{C}_c} \quad [15]$$

Pareillement, le flux de chaleur fatale rejeté par le cycle peut s'écrire en fonction du débit massique du fluide de travail,  $\dot{m}_{FT}$  :

$$\dot{Q}_c = \dot{m}_{FT} \cdot \Delta h_{cond} = \varepsilon_c \cdot \dot{C}_c \cdot (\tilde{T}_{cond} - T_{sci}) \quad [16]$$

## 3. Formulation des contraintes du problème

D'après l'approche optimale en dimensions physiques finies [FEI 06], les contraintes liées au problème traité concernant principalement les débits calorifiques, les efficacités des échangeurs de chaleur ainsi que leur surface d'échange; mathématiquement cela revient à écrire:

$$\begin{cases} \dot{C}_c + \dot{C}_H = \dot{C}_T \text{ à distribuer} \\ \varepsilon_T = \varepsilon_c + \varepsilon_H + \varepsilon_{rec} \text{ si indépendants des } \dot{C}_i \\ A_T = A_c + A_H + A_{rec} \end{cases} \quad [17]$$

## 4. Recherche de $\tilde{T}_{evap}$ et de $\tilde{T}_{cond}$

Pour exprimer  $\tilde{T}_{evap}$  en fonction des propriétés thermo-physiques du fluide de travail décrivant le cycle moteur, nous allons exploiter la chaleur absorbée par le fluide de travail sous forme d'enthalpie au niveau du générateur de vapeur assurant préchauffage, évaporation proprement dite et surchauffe du fluide de travail:

$$\begin{aligned} \Delta h_{evap} &= h_4 - h_3 + h_3 - h_2 + h_2 - h_1 \\ \Delta h_{evap} &= C_{p_v} \cdot (T_4 - T_{evap}) + L_{evap} (T_{evap}) + C_{p_L} \cdot (T_{evap} - T_1) \end{aligned} \quad [18]$$

$$\begin{aligned} \Delta s_{evap} &= s_4 - s_3 + s_3 - s_2 + s_2 - s_1 \\ \Delta s_{evap} &= C_{p_v} \cdot \ln \frac{T_4}{T_{evap}} + \frac{L(T_{evap})}{T_{evap}} + C_{p_L} \cdot \ln \frac{T_{evap}}{T_1} \end{aligned} \quad [19]$$

En supposant  $Cp_v$  et  $Cp_L$  constants, cela revient à écrire:

$$\tilde{T}_{\text{evap}} = \frac{\Delta h_{\text{evap}}}{\Delta s_{\text{evap}}} \approx \frac{Cp_v \cdot (T_4 - T_{\text{evap}}) + L(T_{\text{evap}}) + Cp_L \cdot (T_{\text{evap}} - T_1)}{Cp_v \cdot \ln \frac{T_4}{T_{\text{evap}}} + \frac{L(T_{\text{evap}})}{T_{\text{evap}}} + Cp_L \cdot \ln \frac{T_{\text{evap}}}{T_1}} \quad [20]$$

Identiquement pour  $\tilde{T}_{\text{cond}}$ , le développement des expressions relatives aux enthalpies et entropies spécifiques, s'écrit:

$$\Delta h_{\text{cond}} = h_5 - h_6 + h_6 - h_7 + h_7 - h_8 \quad [21]$$

$$\Delta h_{\text{evap}} = Cp_v \cdot (T_5 - T_{\text{cond}}) + L_{\text{cond}}(T_{\text{cond}}) + Cp_L \cdot (T_{\text{cond}} - T_8)$$

$$\Delta s_{\text{cond}} = s_5 - s_6 + s_6 - s_7 + s_7 - s_8 \quad [22]$$

$$\Delta s_{\text{cond}} = Cp_v \cdot \ln \frac{T_5}{T_{\text{cond}}} + \frac{L_{\text{cond}}(T_{\text{cond}})}{T_{\text{cond}}} + Cp_L \cdot \ln \frac{T_{\text{cond}}}{T_8}$$

Cela permet d'écrire alors:

$$\tilde{T}_{\text{cond}} = \frac{\Delta h_{\text{cond}}}{\Delta s_{\text{cond}}} \approx \frac{Cp_v \cdot (T_5 - T_{\text{cond}}) + L_{\text{cond}}(T_{\text{cond}}) + Cp_L \cdot (T_{\text{cond}} - T_8)}{Cp_v \cdot \ln \frac{T_5}{T_{\text{cond}}} + \frac{L_{\text{cond}}(T_{\text{cond}})}{T_{\text{cond}}} + Cp_L \cdot \ln \frac{T_{\text{cond}}}{T_8}} \quad [23]$$

Il est à signaler que les expressions [20] et [23] relatives aux températures moyennes entropiques d'évaporation et de condensation montrent une forte dépendance par rapport au fluide de travail choisi.

## 5. Détermination de la puissance mécanique délivrée par le cycle en fonction des paramètres et variables du système énergétique

Pour cela, nous utilisons l'expression de puissance thermique alimentant le cycle thermodynamique moteur exprimée par les équations [4] et [8] :

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = u \cdot A_{\text{rec}} \cdot (T_s - \tilde{T}_{\text{rec}}) = \dot{Q}_H = \varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H \cdot (\tilde{T}_{\text{rec}} - T_{\text{sh0}}) \quad [24]$$

Puisque:  $\dot{C}_{\text{rec}} = \dot{C}_H$

En apportant la simplification de notation suivante:  $\tilde{T}_{\text{rec}} \rightarrow T_{\text{rec}}$  ; cela revient à exprimer le flux thermique reçu comme:

$$u \cdot A_{\text{rec}} \cdot T_s - u \cdot A_{\text{rec}} \cdot T_{\text{rec}} = \varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H \cdot T_{\text{rec}} - \varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H \cdot T_{\text{sh0}} \quad [25]$$

Ainsi:

$$T_{\text{sh0}} = \frac{T_{\text{rec}} \cdot (u \cdot A_{\text{rec}} + \varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H) - T_s \cdot u \cdot A_{\text{rec}}}{\varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H} \quad [26]$$

On prendra comme température  $T_{\text{rec}}$  représentative de l'absorbeur thermique, la température moyenne de surface de l'absorbeur

D'autre part [5] permet également d'écrire:

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = u \cdot A_{\text{rec}} (T_s - T_{\text{rec}}) = \dot{C}_H \cdot (T_{\text{shi}} - T_{\text{sh0}}) \quad [27]$$

Ce qui donne directement l'expression suivante:

$$T_{\text{shi}} = T_{\text{sh0}} + \frac{u \cdot A_{\text{rec}}}{\dot{C}_H} \cdot (T_s - T_{\text{rec}}) \quad [28]$$

En remplaçant  $T_{\text{sh0}}$  par son expression [26], nous pouvons alors écrire:

$$T_{\text{shi}} = \frac{1}{\varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H} \left[ T_{\text{rec}} \cdot (u \cdot A_{\text{rec}} + \varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H) - T_s \cdot u \cdot A_{\text{rec}} + \varepsilon_{\text{rec}} \cdot u \cdot A_{\text{rec}} \cdot T_s - \varepsilon_{\text{rec}} \cdot u \cdot A_{\text{rec}} \cdot T_{\text{rec}} \right] \quad [29]$$

Ce qui devient:

$$T_{\text{shi}} = \frac{1}{\varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H} \left[ T_{\text{rec}} \cdot ((1 - \varepsilon_{\text{rec}}) \cdot u \cdot A_{\text{rec}}) + \varepsilon_{\text{rec}} \cdot \dot{C}_H - T_s \cdot u \cdot A_{\text{rec}} (1 - \varepsilon_{\text{rec}}) \right] \quad [30]$$

Par ailleurs, la combinaison des équations [27] et [10] permet d'écrire:

$$\dot{Q}_{\text{rec}} = u \cdot A_{\text{rec}} (T_s - T_{\text{rec}}) = \varepsilon_H \cdot \dot{C}_H \cdot (T_{\text{shi}} - \tilde{T}_{\text{evap}}) \quad [31]$$

Le développement tel que présenté dans l'*Annexe I*, donne lieu à l'expression suivante de la température moyenne entropique du fluide de travail dans l'évaporateur

$$\tilde{T}_{\text{evap}} = T_{\text{rec}} + (T_{\text{rec}} - T_s) \cdot \left( \frac{1 - \varepsilon_{\text{rec}}}{\varepsilon_{\text{rec}}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{u \cdot A_{\text{rec}}}{\dot{C}_H} \quad [32]$$

Symétriquement, si nous considérons que  $T_{\text{sci}} \cong T_0$  sur la boucle de refroidissement et en combinant [13] et [16], nous pouvons alors exprimer la puissance thermique rejetée au condenseur comme:

$$\dot{Q}_c = \dot{C}_c \cdot (T_{\text{sc0}} - T_0) = \varepsilon_c \cdot \dot{C}_c \cdot (\tilde{T}_{\text{cond}} - T_0) \quad [33]$$

Ce qui conduit à la simplification suivante:

$$(T_{\text{sc0}} - T_0) = \varepsilon_c \cdot (\tilde{T}_{\text{cond}} - T_0) \quad [34]$$

ou encore:

$$T_{\text{sc0}} = T_0 (1 - \varepsilon_c) + \varepsilon_c \tilde{T}_{\text{cond}} \quad [35]$$

Or nous savons, d'après [33], que:

$$\tilde{T}_{\text{cond}} = T_0 + \frac{\dot{Q}_c}{\varepsilon_c \cdot \dot{C}_c} \quad [36]$$

Finalement, et d'après le calcul développé en *Annexe II*; la puissance mécanique délivrée s'exprime en fonction des paramètres du système énergétique:

$$\dot{W} = \frac{\dot{Q}_{rec} \cdot (T_s \cdot I_c - T_0 - C_\varepsilon \cdot I_c \cdot \dot{Q}_{rec})}{T_s \cdot I_c - C_\varepsilon \cdot I_c \cdot \dot{Q}_{rec}} = \frac{\dot{Q}_{rec} \cdot \left( C_\varepsilon \cdot \dot{Q}_{rec} + \frac{T_0}{I_c} - T_s \right)}{C_\varepsilon \cdot \dot{Q}_{rec} - T_s} \quad [37]$$

Nous constatons que  $\dot{W}$  s'annule dans les deux cas suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_{rec} = 0; \\ \text{et} \\ \dot{Q}_{rec} = \left( T_s - \frac{T_0}{I_c} \right) \cdot \frac{1}{C_\varepsilon} \end{array} \right. \quad [38]$$

### 5.1. Optimisation en variable température (1<sup>ère</sup> optimisation)

Cela revient à rechercher la température  $T_{rec}$  qui va permettre de produire le maximum de puissance en sortie du système. Et comme  $T_{rec}$  correspond à  $\dot{Q}_{rec}$ , alors pour le maximum on peut écrire:

$$\text{Max1 } \dot{W} \Rightarrow \frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{Q}_{rec}} = 0$$

Tout calcul fait, on trouve:

$$\dot{Q}_{rec}^* = \frac{\sqrt{T_s}}{C_\varepsilon} \cdot \left( \sqrt{T_s} - \sqrt{\frac{T_0}{I_c}} \right) \quad [39]$$

Ainsi,  $\dot{Q}_{rec}^*$  représente le point du maximum de la puissance mécanique qui s'écrit alors:

$$\text{Max1 } \dot{W} = \frac{1}{C_\varepsilon} \cdot \left( \sqrt{T_s} - \sqrt{\frac{T_0}{I_c}} \right)^2 \quad [40]$$

En substituant  $\dot{Q}_{rec}^*$  par son expression exprimée par l'équation [39], l'équation [II.4] permet alors de déduire la température du capteur au maximum de puissance:

$$T_{rec}^* = \sqrt{T_s} \cdot \left( \sqrt{T_s} - \frac{\sqrt{T_s} - \sqrt{\frac{T_0}{I_c}}}{u \cdot A_{rec} \cdot C_\varepsilon} \right) \quad [41]$$

### 5.2. Optimisation en efficacités variables (2<sup>ème</sup> optimisation)

Le maximum de la puissance mécanique exprimée par [41] peut également être optimisé en minimisant le facteur  $C_\varepsilon$  [II.8] ce qui revient à écrire:

$$\text{Max2 } \dot{W} \Rightarrow \text{Min } C_\varepsilon$$

Ce deuxième maximum est recherché en utilisant le calcul variationnel (méthode des multiplicateurs de Lagrange). L'intérêt de cette méthode consiste à trouver les extremums globaux d'une fonction - ici le minimum- liés à une contrainte qui est physique dans notre cas et qui correspond à la contrainte de dimension finie en efficacité:  $\varepsilon_T = \varepsilon_c + \varepsilon_H + \varepsilon_{rec}$  à débit calorifiques  $\dot{C}_i$  imposés;

La détermination de la méthode de Lagrange passe impérativement par deux étapes distinctives. La première permet d'exprimer le Lagrangien en associant la fonction à étudier- à minimiser- avec sa



contrainte- transformée en une equation égale à zero- par le biais du multiplicateur lagrangian  $\lambda$  ; cela conduit à écrire:

$$L(\varepsilon_i) = \left( \frac{1 - \varepsilon_{rec}}{\varepsilon_{rec}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{1}{\dot{C}_H} + \frac{1}{u \cdot A_{rec}} + \frac{1}{I_c \cdot \varepsilon_c \cdot \dot{C}_c} + \lambda (\varepsilon_c + \varepsilon_H + \varepsilon_{rec} - \varepsilon_T) \quad [42]$$

La deuxième étape consiste à dériver partiellement le Lagrangien par rapport à chaque variable ainsi que le multiplicateur. On décline alors le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{rec}} = 0 = -\frac{1}{\dot{C}_h} \left( -\frac{1}{\varepsilon_{rec}^2} \right) + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_h} = 0 = \frac{1}{\dot{C}_h} \left( -\frac{1}{\varepsilon_h^2} \right) + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_c} = 0 = \left( -\frac{1}{I_c \cdot \varepsilon_c^2 \cdot \dot{C}_c} \right) + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad [43]$$

La résolution de ce système d'équations permet dans un premier temps de définir la valeur du multiplicateur  $\lambda$ . La substitution de cette valeur dans les dérivées partielles de chaque contraintes, permet à son tout de déduire les efficacités optimales exprimées comme:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rec} = \varepsilon_h = \varepsilon_T \cdot \frac{\sqrt{I_c \cdot \dot{C}_c}}{2\sqrt{I_c \cdot \dot{C}_c} + \sqrt{\dot{C}_h}} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_T \cdot \frac{\sqrt{\dot{C}_h}}{2\sqrt{I_c \cdot \dot{C}_c} + \sqrt{\dot{C}_h}} \end{cases} \quad [44]$$

Dés lors, la combinaison de ces résultats obtenus selon [44] dans l'équation [II.8] permet d'avoir une première minimisation de  $C_\varepsilon$  :

$$\text{Min } C_\varepsilon = \frac{1}{u \cdot A_{rec}} + \frac{1}{\varepsilon_T} \left( \frac{2}{\sqrt{\dot{C}_h}} + \frac{1}{\sqrt{I_c \cdot \dot{C}_c}} \right)^2 - \frac{1}{\dot{C}_h} \quad [45]$$

### 5.3. Optimisation en débits calorifiques variables

Pour cette optimisation, nous allons procéder à la minimisation de  $\text{Min } C_\varepsilon$  ([45]) par rapport aux débits calorifiques chaud et froid respectivement,  $\dot{C}_h$  et  $\dot{C}_c$  ;  $\text{Max } 3 \dot{W}$  résulte de :

$$\begin{aligned} \text{Max } 3 \dot{W} &\Rightarrow \text{Min } C_\varepsilon \\ \text{Min } C_\varepsilon &\Leftrightarrow \text{Min} \left[ \frac{1}{\varepsilon_T} \left( \frac{2}{\sqrt{\dot{C}_h}} + \frac{1}{\sqrt{I_c \cdot \dot{C}_c}} \right)^2 - \frac{1}{\dot{C}_h} \right] \end{aligned} \quad [46]$$

En considérant la contrainte  $\dot{C}_h + \dot{C}_c = \dot{C}_T$  et en introduisant les variables intermédiaires  $x = \frac{1}{\sqrt{\dot{C}_h}}$  et  $y = \frac{1}{\sqrt{\dot{C}_c}}$  ; l'expression [46] devient:

$$\text{Min } C_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_T} \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{I_c}} y \right)^2 - x^2 \quad [47]$$

D'ou le Lagrangien:

$$L_2(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_T} \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{I_c}} y \right)^2 - x^2 + \lambda \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \dot{C}_T \right) \quad [48]$$

Ainsi, on déduit le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{2}{\varepsilon_T} \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{I_c}} y \right) \cdot 2 - 2x - 2\lambda \cdot \frac{1}{x^3} = 0 & \text{(a)} \\ \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{2}{\varepsilon_T} \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{I_c}} y \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{I_c}} - 2\lambda \cdot \frac{1}{y^3} = 0 & \text{(b)} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \dot{C}_T = 0 \end{cases} \quad [49]$$

Les équations (a) et (b) donnent:

$$2x^3 \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{I_c}} y \right) - 2x^4 \varepsilon_T = 2y^3 \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{I_c}} y \right) \frac{1}{\sqrt{I_c}} = \lambda \quad [50]$$

En posant maintenant que  $x = \frac{X}{y}$  et en opérant quelques arrangements, on obtient:

$$(4 - \varepsilon_T) X^4 + \frac{2}{\sqrt{I_c}} X^3 - \frac{2}{\sqrt{I_c}} X - \frac{1}{I_c} = 0 \quad [51]$$

La résolution numérique de cette équation d'ordre 4 permet d'obtenir 4 racines dont une seulement, noté  $X^*$ , est physiquement acceptée puisque réelle et positive.

La racine  $X^*$  permet alors l'écriture optimale des paramètres  $C_\varepsilon$ :

$$C_\varepsilon^* = \frac{1}{uA_{\text{rec}}} + \left[ \frac{1}{\varepsilon_T} \left( 2X^* + \frac{1}{\sqrt{I_c}} \right)^2 \right] \cdot \frac{1 + X^{*2}}{\dot{C}_T \cdot X^{*2}} \quad [52]$$

## 6. Conclusions-perspectives

Le travail présenté dans cet article fait état du développement d'une nouvelle approche d'optimisation dite: Thermodynamique Optimale en Dimensions physiques Finies, TODF. En fixant la maximisation de la puissance mécanique produite comme fonction objectif, l'analyse TODF a fait ressortir que le cycle ORC activé par une ressource solaire peut produire un maximum de travail en agissant sur trois variables principales en dimensions physiques finies, à savoir:

- un variable de contrôle qui est la température moyenne du capteur
- deux variables dimensionnelles: l'efficacité des échangeurs (le condenseur  $\varepsilon_c$ , le récepteur solaire  $\varepsilon_{\text{rec}}$  et l'évaporateur  $\varepsilon_h$ ); ainsi que les débits calorifiques à travers une fonction  $C_\varepsilon$ . L'étude numérique et de sensibilité paramétrique est à suivre cette étude de faisabilité.

## Annexe de calcul I

En insérant l'équation [30] dans l'équation [31], cela conduit à une nouvelle écriture de l'équation [31]; à savoir:

$$\frac{u.A_{rec}(T_s - T_{rec})}{\varepsilon_H \cdot \dot{C}_H} = \frac{1}{\varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H} \cdot \left\{ \left[ T_{rec} \cdot ((1 - \varepsilon_{rec}) \cdot u.A_{rec}) + \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H - T_s \cdot u.A_{rec} (1 - \varepsilon_{rec}) \right] - \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H \cdot \tilde{T}_{evap} \right\}$$

[I.1]

Donnant lieu à:

$$\frac{u.A_{rec}(T_s - T_{rec})}{\varepsilon_H \cdot \dot{C}_H} = \frac{1}{\varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H} \cdot \left\{ \left[ T_{rec} \cdot ((1 - \varepsilon_{rec}) \cdot u.A_{rec}) + \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H - T_s \cdot u.A_{rec} (1 - \varepsilon_{rec}) \right] - \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H \cdot \tilde{T}_{evap} \right\}$$

[I.2]

Ce qui revient à écrire:

$$\frac{u.A_{rec}(T_s - T_{rec})}{\varepsilon_H} = \frac{1}{\varepsilon_{rec}} \cdot \left\{ \left[ T_{rec} \cdot ((1 - \varepsilon_{rec}) \cdot u.A_{rec}) + \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H - T_s \cdot u.A_{rec} (1 - \varepsilon_{rec}) \right] - \varepsilon_{rec} \cdot \dot{C}_H \cdot \tilde{T}_{evap} \right\}$$

[I.3]

Ou bien encore:

$$\frac{u.A_{rec}(T_s - T_{rec})}{\varepsilon_H} = T_{rec} \cdot (1 - \varepsilon_{rec}) \cdot \frac{u.A_{rec}}{\varepsilon_{rec}} + T_{rec} \cdot \dot{C}_H - T_s \cdot \frac{u.A_{rec}}{\varepsilon_{rec}} (1 - \varepsilon_{rec}) - \dot{C}_H \cdot \tilde{T}_{evap}$$

[I.4]

Nous pouvons aussi écrire:

$$\dot{C}_H \cdot \tilde{T}_{evap} = T_{rec} \cdot \left[ (1 - \varepsilon_{rec}) \cdot \frac{u.A_{rec}}{\varepsilon_{rec}} + \frac{u.A_{rec}}{\varepsilon_H} + \dot{C}_H \right] - T_s \cdot \left[ \frac{u.A_{rec}}{\varepsilon_{rec}} (1 - \varepsilon_{rec}) + \frac{u.A_{rec}}{\varepsilon_H} \right]$$

[I.5]

Et par conséquent:

$$\tilde{T}_{evap} = \frac{1}{\dot{C}_H} \cdot \left\{ T_{rec} \cdot \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_{rec}}{\varepsilon_{rec}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) u.A_{rec} + \dot{C}_H \right] - T_s \cdot \left[ \frac{1 - \varepsilon_{rec}}{\varepsilon_{rec}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right] u.A_{rec} \right\}$$

[I.6]

Ainsi:

$$\tilde{T}_{evap} = T_{rec} + (T_{rec} - T_s) \cdot \left( \frac{1 - \varepsilon_{rec}}{\varepsilon_{rec}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{u.A_{rec}}{\dot{C}_H}$$

[I.7]

## Annexe de calcul II

En exploitant maintenant le ratio entropique reformulé comme suite:

$$\frac{\tilde{T}_{\text{evap}}}{\dot{Q}_{\text{rec}}} = \frac{\tilde{T}_{\text{cond}}}{I_c \cdot \dot{Q}_c}$$

[II.1]

Et en insérant [32] et [36], la dernière formulation du ratio entropique donne:

$$\frac{1}{\dot{Q}_{\text{rec}}} \left[ T_{\text{rec}} + (T_{\text{rec}} - T_s) \left( \frac{1 - \varepsilon_{\text{rec}}}{\varepsilon_{\text{rec}}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{u \cdot A_{\text{rec}}}{\dot{C}_H} \right] = \frac{T_0 + \frac{\dot{Q}_c}{\varepsilon_c \cdot \dot{C}_c}}{I_c \cdot \dot{Q}_c}$$

[II.2]

En parallèle, nous déduisons à partir de l'équation [27] l'expression suivante:

$$T_{\text{rec}} - T_s = - \frac{\dot{Q}_{\text{rec}}}{u \cdot A_{\text{rec}}}$$

[II.3]

Ce qui revient également à:

$$T_{\text{rec}} = T_s - \frac{\dot{Q}_{\text{rec}}}{u \cdot A_{\text{rec}}}$$

[II.4]

En combinant les expressions [II.3] et [II.4]; l'équation [II.2] se reformule ainsi:

$$\frac{1}{\dot{Q}_{\text{rec}}} \left[ T_s - \frac{\dot{Q}_{\text{rec}}}{u \cdot A_{\text{rec}}} - \frac{\dot{Q}_{\text{rec}}}{u \cdot A_{\text{rec}}} \left( \frac{1 - \varepsilon_{\text{rec}}}{\varepsilon_{\text{rec}}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{u \cdot A_{\text{rec}}}{\dot{C}_H} \right] = \frac{T_0 + \frac{\dot{Q}_c}{\varepsilon_c \cdot \dot{C}_c}}{I_c \cdot \dot{Q}_c}$$

[II.5]

Ce qui donne également:

$$\frac{T_s}{\dot{Q}_{\text{rec}}} - \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_{\text{rec}}}{\varepsilon_{\text{rec}}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{1}{\dot{C}_H} + \frac{1}{u \cdot A_{\text{rec}}} \right] = \frac{1}{I_c} \cdot \left( \frac{T_0}{\dot{Q}_c} + \frac{1}{\varepsilon_c \cdot \dot{C}_c} \right)$$

[II.6]

Après simplifications, nous obtenons une expression plus compacte:

$$\frac{T_s}{\dot{Q}_{\text{rec}}} - \frac{1}{I_c} \cdot \frac{T_0}{\dot{Q}_c} = C_\varepsilon$$

[II.7]

avec:

$$C_\varepsilon = \left( \frac{1 - \varepsilon_{\text{rec}}}{\varepsilon_{\text{rec}}} + \frac{1}{\varepsilon_H} \right) \cdot \frac{1}{\dot{C}_H} + \frac{1}{u \cdot A_{\text{rec}}} + \frac{1}{I_c \cdot \varepsilon_c \cdot \dot{C}_c}$$

[II.8]

En procédant à la multiplication suivante:

$$\left( \frac{T_s}{\dot{Q}_{\text{rec}}} - \frac{1}{I_c} \cdot \frac{T_0}{\dot{Q}_c} = C_\varepsilon \right) * I_c \cdot \dot{Q}_c \cdot \dot{Q}_{\text{rec}}$$

[II.9]

Et comme  $\dot{Q}_c = \dot{Q}_{rec} - \dot{W}$ , nous pouvons déduire alors que:

$$T_s \cdot I_c \cdot (\dot{Q}_{rec} - \dot{W}) - T_0 \dot{Q}_{rec} = C_\varepsilon \cdot I_c \cdot (\dot{Q}_{rec} - \dot{W}) \cdot \dot{Q}_{rec}$$

[II.10]

Après réarrangement des termes, cela donne:

$$\dot{Q}_{rec} \cdot (T_s \cdot I_c - T_0) - T_s \cdot I_c \cdot \dot{W} = C_\varepsilon \cdot I_c \cdot \dot{Q}_{rec}^2 - C_\varepsilon \cdot I_c \cdot \dot{Q}_{rec} \cdot \dot{W}$$

[II.11]

De ce fait, la puissance mécanique délivrée s'exprime alors :

$$\dot{W} = \frac{\dot{Q}_{rec} \cdot (T_s \cdot I_c - T_0 - C_\varepsilon \cdot I_c \cdot \dot{Q}_{rec})}{T_s \cdot I_c - C_\varepsilon \cdot I_c \cdot \dot{Q}_{rec}} = \frac{\dot{Q}_{rec} \cdot \left( C_\varepsilon \cdot \dot{Q}_{rec} + \frac{T_0}{I_c} - T_s \right)}{C_\varepsilon \cdot \dot{Q}_{rec} - T_s}$$

[II.12]

## Bibliographie

[BP 19] BP Energy outlook, 2019 edition.

[PAI 14] PAIVA S.L.D., SAVI M. A., VIOLA F.M., LEIROZ A.J.K., Global warming description using Daisyworld model with greenhouse gases, Biosystems, vol 125, p. 1-15, Nov 2014.

[LET 19] LETCHER T. M., Why do we have global warming? Managing Global Warming, p. 3–15. doi:10.1016/b978-0-12-814104-5.00001-6, 2019.

[HAM 19] HAMMOUD M., SHOKR B., ASSI A., HALLAL J., KHOURY P., Effect of dust cleaning on the enhancement of the power generation of a coastal PV-power plant at Zahrani Lebanon, Solar Energy, vol 184, p. 195-201, 15 May 2019.

[HOA 15] HOA C.K., SIMS A., CHRISTIAN J.M., Evaluation of Glare at the Ivanpah Solar Electric Generating System, Energy Procedia, vol 69, p. 1296-1305, May 2015.

[AQA19] AQACHMAR Z., ALLOUHI A., JAMIL A., GAGOCHA B., KOUSKSOU T., Parabolic trough solar thermal power plant Noor I in Morocco, Energy, vol 178, p. 572-584, 1 July 2019.

[ORC 19] ORC world map <<https://orc-world-map.org/>>, access 20-07-2019.

[VAN 19] VAN KLEEF L. M.T., OYEWUNMI, O.A., MARKIDES C. N., Multi-objective thermo-economic optimization of organic Rankine cycle (ORC) power systems in waste-heat recovery applications using computer-aided molecular design techniques, Applied Energy, vol 251, p. 1125131, Oct 2019. <<https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.01.071>>

[LEE 19] LEE Y., KIM J., AHMED U., KIM C., LEE Y., Multi-objective optimization of Organic Rankine Cycle (ORC) design considering exergy efficiency and inherent safety for LNG cold energy utilization, Journal of Loss Prevention in the Process Industries, Vol58, p. 90-101, Mar 2019.

[ARS 11] ARSLAN O., YETIK O., ANN based optimization of supercritical ORC-Binary geothermal power plant: Simav case study, Applied Thermal Engineering, Vol 31, p. 3922-3928, Dec 2011.

[FEI 13] FEIDT M., Thermodynamique optimale en dimensions physiques finies, ISBN 978-2-7462-4542-6, Edition Lavoisier, Paris, 2013.

[FEI 06] FEIDT M., Energétique, concepts et applications, ISBN 978-2100490660, Edition Dunod, Paris, 2006.